DRUŠTVO MATEMATIČARA SRBIJE

Materijali za mlade matematičare, sv. 43

Dragan Stevanović Marko Milošević

Vladimir Baltić

DISKRETNA MATEMATIKA

OSNOVE KOMBINATORIKE I TEORIJE GRAFOVA

Zbirka rešenih zadataka

B E O G R A D

2004

Autori: *dr Dragan Stevanović*, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu
Marko Milošević, asistent Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu
Vladimir Baltić, asistent Ekonomskog fakulteta u Beogradu

DISKRETNA MATEMATIKA, Osnove kombinatorike i teorije grafova
Zbirka rešenih zadataka

Materijali za mlade matematičare, sveska 43

Izdavač: DRUŠTVO MATEMATIČARA SRBIJE
Beograd, Kneza Mihaila 35/IV
`dmsmatf.bg.ac.yu` , `http://www.matf.bg.ac.yu/dms/`

Recenzenti: *dr Dragoš Cvetković*
dr Vojislav Petrović

Urednik: *dr Zoran Kadelburg*

Za izdavača: *dr Rade Doroslovački*

Crteži i slog: *autori*

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51-74:004(075.8)(076)

СТЕВАНОВИЋ, Драган
Diskretna matematika : osnovi kombinatorike i teorije grafova : zbirka rešenih zadataka / Dragan Stevanović, Marko Milošević, Vladimir Baltić ; [crteži autori]. – Beograd : Društvo matematičara Srbije, 2004. (Valjevo : Alexandria). – 195 str. : graf. prikazi ; 24 cm. – (Materijali za mlade matematičare ; sv. 43 / Društvo matematičara Srbije)

Tiraž 500. – Bibliografija: str. 195.

ISBN 86–81453–52–1
1. Милошевић, Марко
а) Дискретна математика - Задаци
COBISS.SR–ID 115360268

ISBN: 86–81453–52–1

Tiraž: 500 primeraka

Štampa: ALEXANDRIA, D.O.O, Valjevo

Sadržaj

Uvod

Iako je matematika u potpunosti apstraktna nauka, njen razvoj je velikim delom uslovljen njenim primenama. Na primer, u doba industrijske revolucije i pojave brojnih mehaničkih mašina došlo je do velikog procvata matematičke analize, jer je ona bila u stanju da rešava optimizacione probleme koji su se javljali pri radu sa takvim mašinama. S obzirom da su mašine tada bile kontinualnog dejstva, nije bilo velike potrebe za rešavanjem optimizacionih problema na konačnim skupovima i takvi problemi su tretirani kao rekreativna matematika. Situacija se menja sa pojavom računara sredinom prošlog veka, koji stvaraju mogućnost efektivnog rešavanja mnogih optimizacionih problema na velikim konačnim skupovima. Takva mogućnost nameće potrebu za boljim upoznavanjem matematičkih struktura definisanih nad konačnim ili prebrojivim skupovima i dovodi do naglog razvitka diskretne matematike u poslednjih pedesetak godina. Štaviše, svi matematički problemi u računarskim naukama pripadaju diskretnoj matematici, pa je zbog toga diskretna matematika obavezan predmet na računarskim fakultetima širom sveta.

Namena zbirke je da prati program predmeta "Diskretna matematika" na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu. Neke oblasti diskretne matematike, kao što su matematička logika, algebra i (diskretna) verovatnoća, proučavaju se u okviru posebnih predmeta na ovom fakultetu. Zbog toga se prvi autor, koji i predaje ovaj predmet, koncentrisao samo na dve važne oblasti diskretne matematike: kombinatoriku i teoriju grafova. Inače, postoje i drugi važni delovi diskretne matematike (npr. teorija kodova), ali oni nisu ušli u nastavni program zbog nedostatka vremena.

Zbirka sadrži 253 zadatka, svaki sa više ili manje iscrpnim rešenjem. Zadaci su rasporedjeni u tri glave: prebrojavanje sa stilom, funkcije generatrise i teorija grafova, dok su rešenja svih zadataka data u četvrtoj glavi. U svakoj glavi zadaci su dalje rasporedjeni u odeljke, a na početku svakog odeljka nalazi se kratak teorijski uvod, koji čine definicije i neke poznate teoreme, iznete bez dokaza. Unutar odeljaka, zadaci su rasporedjeni po težini. Lakši zadaci, za čije rešavanje je dovoljna direktna upotreba definicija i rezultata iznetih u teorijskom uvodu, označeni su sa $^-$. Zadaci uobičajene težine (a ponekad i malo teži od njih) dati su bez oznake, dok su teški zadaci, za čije rešavanje je potrebno više mućkanja glavom, označeni sa $^+$.

S obzirom da su svi autori bivši, više ili manje uspešni, takmičari, delovi zbirke prilagodjeni su korišćenju u pripremama za matematička takmičenja srednjih škola. Talentovanim učenicima su naročito dostupni cela prva glava, a zatim odeljci 2.2, 2.3, 2.4, 3.1, 3.3 i 3.4. Naravno, takmičari mogu da imaju samo koristi ako budu pokušali da rešavaju zadatke i iz ostalih odeljaka.

Pored ovoga, zbirka sadrži i posebnu petu glavu, koja sadrži skoro sve zadatke iz teorije grafova koji su se poslednjih godina pojavljivali na domaćim i medjunarodnim matematičkim takmičenjima.

Autori su zahvalni na pomoći Sanji Stevanović, koja je nacrtala najveći deo ilustracija u zbirci, kao i Marku Petkoviću, studentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, čijih je desetak rešenja našlo mesto u ovoj zbirci. Veliku zahvalnost dugujemo i recenzentima na pažljivom čitanju rukopisa i brojnim sugestijama. Nijedna knjiga nije bez grešaka, pa tako sigurno nije ni ova. Sve greške u ovoj zbirci su isključivo zasluga autora.

U Nišu, aprila 2004. Autori

Glava 1

Prebrojavanje sa stilom

1.1 Principi prebrojavanja

Matematička definicija prebrojavanja. Neka je N skup prirodnih brojeva. Za proizvoljan prirodni broj $n \in N$, neka je $N_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Ako je X proizvoljan konačan skup, tada se pod *prebrojavanjem* skupa X podrazumeva konstruisanje bijektivne funkcije f, koja za neko $n_0 \in N$ preslikava N_{n_0} u X. Broj n_0 zovemo brojem elemenata skupa X i označavamo sa $|X|$.

Princip jednakosti. Ako za dva konačna skupa A i B postoji bijekcija $f \colon A \mapsto B$, tada je $|A| = |B|$.

Princip zbira. Ako su A i B neprazni i disjunktni konačni skupovi ($A \cap B = \emptyset$), tada je $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Princip proizvoda. Neka su X i Y konačni neprazni skupovi, i neka je S podskup $X \times Y$. Neka je $r_x(S) = |S \cap \{(x, y) \colon y \in Y\}|$, a $c_y(S) = |S \cap \{(x, y) \colon x \in X\}|$. Tada važi:

(i) $|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S)$.

(ii) Ako je $r_x(S) = r$ za svako x i $c_y(S) = c$ za svako y, tada je $r|X| = c|Y|$.

(iii) $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Dirihleov princip, I. Ako je m loptica smešteno u n kutija i $m > n$, tada se bar u jednoj kutiji nalaze bar dve loptice.

Dirihleov princip, II. Ako je m loptica smešteno u n kutija i $m > nr$, tada se bar u jednoj kutiji nalazi bar $r + 1$ loptica.

Prebrojavanje sa stilom. Prebrojavanje konačnih skupova uz korišćenje ovih i drugih kombinatornih principa smatramo (neformalno) prebrojavanjem sa stilom.

Zadaci

1. Predavanju prisustvuje 26 studenata. Svaki mladić poznaje tačno 8 devojaka na predavanju, a svaka devojka poznaje tačno 5 mladića. Koliko devojaka ima na predavanju?

2. a) Dato je nekoliko podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tako da svaki od njih ima četiri elementa i da se svaki element skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ nalazi u tačno tri od datih podskupova. Koliko ima podskupova? Naći bar jednu familiju podskupova sa takvim osobinama.

   b) Da li je moguće naći familiju podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ tako da svaki od njih ima tačno tri elementa i da se svaki element skupa $\{1, 2, \ldots, 8\}$ nalazi u tačno pet podskupova?

3. Koliko različitih delilaca ima broj 60000?

4. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Odrediti broj svih funkcija $f : S \mapsto S$ koje nemaju fiksnu tačku.

5. a) Za prirodan broj n i prost broj p, neka je

$$\mu_{n,p} = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

   Dokazati da je $\mu_{n,p}$ najveći stepen broja p koji deli $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

   b) $^+$ Neka je reprezentacija broja n u binarnom sistemu

$$n = 2^{e_1} + 2^{e_2} + \cdots + 2^{e_r},$$

   gde je $e_1 > e_2 > \cdots > e_r \geq 0$. Dokazati da je $n!$ deljivo sa 2^{n-r}, ali ne i sa 2^{n-r+1}.

6. $^-$ Slepi čovek ima hrpu od 10 sivih i 10 crnih čarapa. Koliko čarapa treba da izabere da bi bio siguran da ima par iste boje? Koliko njih treba da izabere da bi bio siguran da ima par sive boje?

7. Neka je X skup od n osoba. Dokazati da postoje bar dve osobe iz X koje imaju isti broj poznanika u X. (Pretpostavlja se da je poznanstvo simetrična relacija.)

8. *Celobrojna tačka* u trodimenzionalnom prostoru je tačka čije su sve koordinate celi brojevi. Ako je dato devet celobrojnih tačaka, dokazati da postoji bar jedan par tih tačaka tako da je središte duži koja ih spaja takodje celobrojna tačka.

9. $^-$ Dokazati da u proizvoljnom skupu od $n+1$ prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika deljiva sa n.

10. Dokazati da za svako $n \in N$ postoji broj oblika $11\ldots100\ldots0$ koji je deljiv sa n.

11. Dokazati da postoji $n \in N$, tako da se decimalni zapis broja 3^n završava sa 0001.

12. $^+$ Dokazati da se medju $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu naći tri broja tako da jedan od njih bude jednak zbiru ostala dva.

13. $^-$ Dokazati da medju $n+1$ različitih elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ postoje dva koja su uzajamno prosta.

14. a) Dokazati da u svakom podskupu sa $n+1$ elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ postoje dva različita broja tako da jedan od njih deli drugi;

    Uputstvo. Neka je X podskup sa $n+1$ elemenata, a Y skup svih neparnih brojeva $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Definisati funkciju $f\colon X \mapsto Y$ pomoću

    $$f(x) = \text{najveći neparan prirodan broj koji deli } x$$

    i uočiti da f nije injektivno preslikavanje...

    b) Dokazati da postoji podskup sa n elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ tako da nijedan od njegovih elemenata ne deli neki drugi element.

15. Neka je dato n celih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$, koji ne moraju da budu različiti. Dokazati da postoji skup uzastopnih brojeva $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l$ čiji je zbir $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$ deljiv sa n.

16. Golf igrač ima d dana da se pripremi za turnir i mora da vežba igrajući bar jednu partiju dnevno. Kako bi izbegao prezasićenost, igrač ne bi smeo da odigra više od m partija ukupno. Ako za r važi $1 \le r \le 2d - m - 1$, dokazati da postoji niz uzastopnih dana u toku kojih je igrač odigrao tačno r partija.

17. $^+$ a) Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_r$ niz različitih celih brojeva. Za svako i, $i = 1, 2, \ldots, r$, neka m_i označava dužinu najdužeg rastućeg podniza koji počinje sa x_i i neka n_i označava dužinu najdužeg opadajućeg podniza koji počinje sa x_i. Dokazati da je funkcija f, koja broju i, $i = 1, 2, \ldots, r$, dodeljuje par (m_i, n_i), injektivna funkcija.

    b) U proizvoljnom nizu $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ različitih $mn+1$ realnih brojeva, ili postoji rastući podniz $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1})$, ili postoji opadajući podniz $a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1})$, ili postoje oba.

1.2 Uredjeni izbori elemenata

Uredjeni izbori sa ponavljanjem. Neka je N skup sa n elemenata, $n \ge 0$, a M skup sa m elemenata, $m \ge 1$. Broj svih preslikavanja $f\colon N \mapsto M$ jednak je m^n.

Karakteristična funkcija i broj podskupova. Neka je N skup sa n elemenata, $n \ge 0$, a M njegov podskup. Podskup M se opisuje *karakterističnom funkcijom*

$\chi_M : N \mapsto \{0,1\}$, tako da je

$$\chi_M(i) = \begin{cases} 0, & i \notin M \\ 1, & i \in M \end{cases}$$

Broj svih podskupova skupa N jednak je 2^n.

Uredjeni izbori bez ponavljanja. [1] Neka je N skup sa n elemenata, $n \geq 0$, a M skup sa m elemenata, $m \geq 0$. Broj svih injektivnih preslikavanja $f : N \mapsto M$ jednak je $m(m-1) \cdot \cdots \cdot (m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$.

Faktorijel. Ako je $n \in \mathbf{N}$, tada se proizvod $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ kraće označava kao $n!$ i čita n *faktorijel.* Po dogovoru je $0! = 1$.

Zadaci

18. $^-$ U radnji postoji k različitih vrsta razglednica, koje treba poslati prijateljima, kojih ima n.

    a) Na koliko načina je moguće svakom prijatelju poslati tačno jednu razglednicu?

    b) Koliko ima načina ako svakom prijatelju treba poslati različitu razglednicu?

    c) Od svake vrste razglednica je kupljena tačno po jedna. Na koliko načina je moguće poslati razglednice prijateljima (prijatelj može dobiti bilo koji broj razglednica, uključujući i 0)?

19. Koliko ima šestocifrenih brojeva u kojima su bar dve cifre iste?

20. Da li medju brojevima $1, 2, \ldots, 9999999$ ima više onih koji sadrže cifru 5 u decimalnom zapisu ili onih koji je ne sadrže?

21. $^+$ Odrediti broj uredjenih parova (A, B), gde je $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

22. Koliko se binarnih relacija može definisati na skupu sa n elemenata? Koliko postoji: a) refleksivnih, b) simetričnih, c) refleksivnih i simetričnih relacija?

23. a) Koliko ima $n \times n$ matrica čiji elementi pripadaju skupu $\{0, 1, \ldots, q-1\}$?

    b) $^{++}$ Neka je q prost broj. Koliko ima matrica iz a) čija determinanta nije deljiva sa q? (Drugim rečima, koliko ima nesingularnih matrica nad konačnim poljem sa q elemenata?)

24. $^-$ Komitet od devet članova treba da izabere predsednika, sekretara i blagajnika. Koliko mogućih izbora postoji?

[1] Pored termina *uredjeni izbori*, u literaturi se često sreću i izrazi *varijacije sa ponavljanjem* i *varijacije bez ponavljanja.*

25. U odeljenju ima m devojčica i n dečaka.

    a) $^{-}$ Na koliko načina se učenici mogu poredjati u vrstu?

    b) Na koliko načina se učenici mogu poredjati u vrstu tako da su sve devojčice zajedno?

26. Na koliko načina se mogu izabrati jedno crno i jedno belo polje na šahovskoj tabli tako da se ona ne nalaze u istoj vrsti ili istoj koloni?

27. Koliko ima $m \times n$ matrica, $m, n \in N$, sa elementima $+1$ i -1, takvih da je proizvod elemenata u svakoj vrsti i svakoj koloni jednak:

    a) $+1$;

    b) -1?

1.3 Permutacije

Permutacije. Permutacija α skupa X sa n elemenata, $n \geq 0$, je bijektivno preslikavanje $\alpha\colon X \mapsto X$. Broj permutacija skupa X jednak je $n!$.

Standardni zapis permutacije. Permutacija α skupa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ standardno se zapisuje na sledeći način:

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \alpha(x_1) & \alpha(x_2) & \ldots & \alpha(x_n) \end{pmatrix}.$$

Ciklusni zapis permutacije. Permutacija α skupa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ zapisuje se pomoću ciklusa na sledeći način:

i) Ako je X prazan skup, ciklusni zapis je prazna reč.

ii) Izabere se proizvoljni element $x \in X$ i odredi najmanji prirodni broj r tako da je $\alpha^r(x) = x$. Ciklusni zapis permutacije α se sastoji od ciklusa $(x, \alpha(x), \alpha^2(x), \ldots, \alpha^{r-1}(x))$ i ciklusnog zapisa za restrikciju permutacije α na skup $X \setminus \{x, \alpha(x), \alpha^2(x), \ldots, \alpha^{r-1}(x)\}$.

Uobičajeno je da se ciklusi dužine 1 ne navode u ciklusnoj notaciji.

Red permutacije. Za permutaciju $p : X \mapsto X$ neka p^k označava permutaciju dobijenu k-tostrukom kompozicijom p, tj. $p^1 = p$ i $p^k = p \circ p^{k-1}$. Pod *redom* permutacije p podrazumeva se najmanji prirodan broj k tako da je $p^k = id$, gde id označava identičku permutaciju (koja svaki element slika u samog sebe).

Zadaci

28. Na koliko načina se može postaviti osam topova na šahovsku tablu tako da se oni medjusobno ne napadaju?

29. Ako je $n \geq 2$, koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima su brojevi 1 i 2 susedni?

30. Ako je $n \geq 2$, koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima broj 2 stoji (ne obavezno odmah) iza broja 1?

31. Ako je $n \geq k + 2$, koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima izmedju brojeva 1 i 2 stoji tačno k drugih brojeva?

32. *Kružna permutacija* je raspored različitih objekata na kružnici (ili za okruglim stolom). Naći broj kružnih permutacija n različitih objekata.

33. Upravni odbor od n članova ima predsednika i dva potpredsednika. Na koliko načina se oni mogu smestiti za okrugli sto tako da oba potpredsednika sede pored predsednika?

34. Naći broj načina da se n devojaka i n mladića smesti za okrugli sto tako da izmedju svake dve devojke sedi neki mladić.

35. $^-$ Napisati ciklusni zapis za permutaciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

36. $^-$ Odrediti red permutacije $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

37. Preferans špil od 32 karte je podeljen u dva jednaka dela i promešan *preplitanjem*, tako da ako je originalni poredak karata bio $1, 2, 3, 4, \ldots$, novi poredak je $1, 17, 2, 18, \ldots$. Koliko puta treba primeniti ovakvo mešanje da bi se špil vratio u originalni poredak?

38. Koliko permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ ima samo jedan ciklus?

1.4 Neuredjeni izbori elemenata

Binomni koeficijenti. Neka su n i k nenegativni celi brojevi. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ je funkcija promenljivih n i k data pomoću

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}.$$

Za $k = 0$ definiše se $\binom{n}{0} = 1$, a za $k < 0$ i $k > n$ definiše se $\binom{n}{k} = 0$.

Neuredjeni izbori bez ponavljanja. Neka je X konačan skup, a k nenegativan ceo broj. Broj k-točlanih podskupova skupa X jednak je $\binom{|X|}{k}$.

Neuredjeni izbori sa ponavljanjem. [2] Svakom neuredjenom izboru k elemenata sa ponavljanjem skupa $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ odgovara n-torka celih brojeva

[2] Pored termina *neuredjeni izbori*, u literaturi se često sreću i izrazi *kombinacije bez ponavljanja* i *kombinacije sa ponavljanjem*.

$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, takvih da je $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = k$. Broj ovakvih izbora jednak je $\binom{n+k-1}{n-1}$.

Kompozicije prirodnih brojeva. Svakom neuredjenom izboru k elemenata sa ponavljanjem skupa $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, tako da je svaki element izabran bar jednom, odgovara n-torka celih brojeva $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, takvih da je $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = k$. Ovakva n-torka celih brojeva se naziva *kompozicija broja k na n delova*, a broj ovakvih kompozicija jednak je $\binom{k-1}{n-1}$.

Permutacije sa ponavljanjem. Neka je X skup sa n elemenata, a $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ skup sa m elemenata. Permutacija sa ponavljanjem tipa $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, je preslikavanje $\alpha \colon X \mapsto Y$ tako da je $|\alpha^{-1}(y_i)| = k_i$. Broj permutacija sa ponavljanjem tipa $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ jednak je $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$, naziva se *multinomijalni koeficijent* i označava sa $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$.

Zadaci

39. Dokazati da je $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$ za $k \leq [n/2]$ i $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{k+1}$ za $k \geq [n/2]$.

40. Po šahovskoj tabli kreće se top. On polazi iz donjeg levog ugla table i kreće se, jedno po jedno polje, po najkraćem putu do gornjeg desnog ugla table. Koliko postoji najkraćih puteva?

41. Na koliko načina se $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ različitih kuglica može razmestiti u m različitih kutija, tako da za svako i, $1 \leq i \leq m$, važi da se u i-toj kutiji nalazi n_i kuglica?

42. Na koliko načina se od 6 osoba može sastaviti 5 različitih tročlanih komisija, tako da je za svaku komisiju unapred poznato njeno zaduženje?

43. Koliko postoji permutacija špila od 52 karte u kojima se sva četiri asa nalaze medju prvih 10 karata?

44. Jedan čovek ima 12 rodjaka—5 muškaraca i 7 žena, a njegova žena takodje ima 12 rodjaka—7 muškaraca i 5 žena. Zajedničkih rodjaka nemaju. Rešili su da pozovu u goste svako po 6 svojih rodjaka, ali tako da medju gostima bude 6 žena i 6 muškaraca. Na koliko načina to mogu uraditi?

45. Na koliko načina košarkaški trener može sastaviti ekipu od 5 košarkaša sa dva centra, dva beka i jednim krilom, ako na raspolaganju ima 10 košarkaša, od kojih trojica mogu biti samo centri, trojica samo bekovi, jedan samo krilo, dvojica krilo ili bek, a jedan krilo ili centar?

46. Na koliko načina se $2n$ vojnika (različitih po visini) može rasporediti u dve vrste tako da je svaki vojnik iz prve vrste niži od vojnika iza njega?

47. Dato je $3n + 1$ predmeta, tako da se n od tih predmeta ne razlikuju medjusobno, a svi ostali predmeti se razlikuju i medjusobno i od prvih n predmeta. Na koliko načina se može izabrati n predmeta?

48. $^+$ U skupštini ima 30 poslanika. Svaki od poslanika je u svadji sa tačno deset drugih poslanika. Na koliko načina može biti formirana tročlana komisija poslanika tako da su svaka dva člana komisije medjusobno u svadji ili da nikoja dva člana komisije nisu u svadji?

49. U radnji postoji k različitih vrsta razglednica, čiji je broj ograničen—postoji tačno a_i razglednica od i-te vrste. Na koliko načina je moguće poslati prijateljima, kojih ima n, sve razglednice iz radnje ako je dozvoljeno poslati više puta istu vrstu razglednice istom prijatelju?

50. Neka je izmnožen izraz $(x+y+z)^n$ i neka su sabirci grupisani zajedno na uobičajeni način: na primer za $n=2$,

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx.$$

Koliko ima sabiraka na desnoj strani, ako je n proizvoljan prirodan broj?

51. Na koliko načina se n_1 plavih, n_2 žutih i n_3 crvenih kuglica može razmestiti u m kutija, ako se kuglice iste boje ne razlikuju medjusobno?

52. Na koliko načina se 8 istih svezaka, 9 istih olovaka i 10 istih knjiga mogu podeliti trojici učenika, tako da svaki učenik dobije bar po jedan predmet od svake vrste?

53. U kutiji se nalazi 36 žutih, 27 plavih, 18 zelenih i 9 crvenih kuglica, pri čemu se kuglice iste boje ne razlikuju medjusobno. Na koliko načina se može izabrati 10 kuglica?

54. a) Na polici se nalazi 12 knjiga. Na koliko načina se može izabrati 5 knjiga tako da nikoje dve izabrane knjige nisu susedne?

    b) Na koliko načina se 7 patuljaka i 5 goblina može poredjati u red tako da nikoja dva goblina nisu susedna?

    c) Za okruglim stolom kralja Artura sedi 12 vitezova. Na koliko načina se može izabrati 5 vitezova tako da nikoja dva viteza ne sede jedan do drugoga?

55. Koliko funkcija $f : \{1,2,\ldots,n\} \mapsto \{1,2,\ldots,n\}$ je *monotono neopadajuće*, tj. za $i < j$ važi $f(i) \leq f(j)$?

56. $^+$ Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa X naziva se *antilanac* ako nijedan skup iz $\mathcal{F}$ nije podskup nekog drugog skupa iz $\mathcal{F}$. Ako je $|X| = n$, tada najveći antilanac skupa X sadrži $\binom{n}{[n/2]}$ skupova.

57. Dokazati da je

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \ldots, n_k}.$$

1.5 Binomni identiteti

Faktorijelna reprezentacija. Za cele brojeve n i k, $n \geq k \geq 0$, važi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Uslov simetričnosti. Za cele brojeve n i k, $n \geq 0$, važi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Adiciona formula. Za cele brojeve n i k važi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Binomna teorema. Za svaki nenegativan ceo broj n važi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Multinomijalna teorema. Za svaki prirodan broj $n \geq 1$ važi

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n \\ k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$

Izvlačenje iz zagrada. Za cele brojeve n i k, $k \neq 0$, važi

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}.$$

Sumaciona formula. Za cele brojeve n i m, $n, m \geq 0$, važi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \cdots + \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{n}$$

i

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Negacija gornjeg indeksa. Za cele brojeve n i k važi

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Pojednostavljivanje proizvoda. Za cele brojeve n, m i k važi

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

Sume proizvoda. Za cele brojeve n i r, $r \geq 0$, važi

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

i

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}.$$

Takodje važi i Vandermondova konvolucija:

$$\sum_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}.$$

Ispuštanje granica za indeks sumiranja. U radu sa sumama koje sadrže binomne koeficijente često se ispuštaju granice za indeks sumiranja (na primer, navodi se samo $\sum_k$ kao u prethodnom pasusu), s tim što se podrazumeva da se sumiranje vrši po svim vrednostima indeksa za koje je izraz koji se sumira različit od 0.

Tako, na primer, u sumi $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ iz prethodnog pasusa sumiranje se vrši po svim vrednostima k za koje je $0 \leq k \leq r$ (da bi bilo $\binom{r}{k} \neq 0$) i $0 \leq n-k \leq s \Rightarrow n-s \leq k \leq n$ (da bi bilo $\binom{s}{n-k} \neq 0$), odnosno, za koje je $\max(0, n-s) \leq k \leq \min(r, n)$. Sada je jasno zašto je mnogo jednostavnije ispustiti granice za indeks sumiranja, ako izraz ima vrednost 0 kada je indeks van tih granica.

Dokaz kombinatornim argumentima. Pod dokazivanjem identiteta kombinatornim argumentima podrazumeva se nalaženje skupa X tako da obe strane identiteta predstavljaju broj elemenata skupa X.

Zadaci

58. Za realni broj x i nenegativan ceo broj n, neka je $x^{\underline{0}} = 1$, a

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

Dokazati sledeći analog binomne teoreme:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{n-i}}.$$

59. Dokazati da je za svaki prirodan broj n broj $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ neparan.

60. Izračunati zbir koeficijenata polinoma po x koji predstavlja razvoj izraza $(3x-2)^{100}$.

61. Naći koeficijent uz:
    a) x^2y^3z u razvoju izraza $(2x+2y-3z)^6$,
    b) x^2y^8z u razvoju izraza $(2x+y^2-5z)^7$,
    c) $u^2v^3z^3$ u razvoju izraza $(3uv-2z+u+v)^7$.

62. Naći koeficijent uz:
    a) x^{10} u razvoju izraza $(1-x^2+x^3)^{11}$.
    b) x^3 u razvoju izraza $(1-x+2x^2)^9$.

63. Dokazati sledeće identitete:

$$\text{a)}\quad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1};$$

$$\text{b)}\quad \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = (n+2)\cdot 2^{n-1};$$

$$\text{c)}\quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k(k+1)\binom{n}{k} = 0.$$

64. Dokazati da je

$$\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

65. Dokazati da je

$$\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n+1}{1}+\frac{1}{2^2}\binom{n+2}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}=2^n.$$

66. Dokazati identitet

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}$$

pomoću kombinatornih argumenata.

67. Naći vrednost izraza $\sum_{k=0}^{n} k^4$.

68. Izračunati

$$\text{a)}\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{k}{m},$$

$$\text{b)}\quad \sum_{k=0}^{n} k\binom{k}{m}.$$

69. Ako je $n \geq m \geq 0$:

a) Dokazati da je

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \begin{cases} (-1)^n, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

b) $^+$ Izračunati

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}.$$

70. $^+$ Dokazati da je

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{m}{k} 2^k.$$

71. Ako je $n \geq 0$, koja je vrednost izraza

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} \quad ?$$

72. $^+$ Naći vrednost izraza

$$\sum_{k} \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n}$$

u zavisnosti od r, s, m i n, ako su m i n nenegativni celi brojevi.

Uputstvo. Za početak zameniti $\binom{r+k}{m+n}$ sa $\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j}$.

73. $^+$ Ako je $0 \leq k < m$, dokazati da važi sledeća formula:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+m} + \binom{n}{k+2m} + \cdots = \frac{1}{m} \sum_{0 \leq j < m} \left(2\cos\frac{j\pi}{m}\right)^n \cos\frac{j(n-2k)\pi}{m}.$$

Na primer za $k = 1$ i $m = 3$ važi

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right).$$

Uputstvo. Binomna formula, Muavrova formula $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ i odgovarajući m-ti koren iz jedinice su osnovni sastojci rešenja ovog problema ...

1.6 Princip uključenja-isključenja

Princip uključenja-isključenja. Za konačne skupove A_1, A_2,..., A_n važi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Permutacije bez fiksne tačke. Broj permutacija π konačnog skupa X sa n elemenata, takvih da je $\pi(i) \neq i$ za svako $i \in X$, jednak je

$$D(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Zadaci

74. $^-$ U razredu sa 30 učenika, 12 od njih voli matematiku, 14 voli fiziku, 13 hemiju, 5 učenika voli i matematiku i fiziku, 7 voli i fiziku i hemiju, a 4 voli matematiku i hemiju. Tri učenika vole sva tri predmeta. Koliko učenika ne voli ni jedan od ovih predmeta?

75. $^-$ Odrediti koliko ima brojeva ne većih od 1000 koji su deljivi bar jednim od brojeva 2, 3, 5 ili 7.

76. Neka je $n \in N$ i S_1, S_2, ..., S_n konačni skupovi. Dokazati jednakost

$$|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcup_{i \in I} S_i\right|.$$

77. U radnji je kupljeno k različitih razglednica koje treba poslati prijateljima, kojih ima n.

    a) Na koliko načina je moguće poslati razglednice, ako svaki prijatelj treba da dobije bar jednu razglednicu?

    b) Na koliko načina je moguće poslati razglednice, ako tačno l prijatelja ne treba da dobiju razglednicu?

78. Koliko ima n-tocifrenih brojeva u čijem zapisu učestvuje k različitih nenula cifara, gde je $1 \leq k \leq 9$?

79. Kocka za igru čije su strane numerisane brojevima $1, 2, 3, 4, 5, 6$ baca se do pojave svih šest strana. Rezultat takvog eksperimenta je niz cifara koje su se pojavljivale na gornjoj strani kocke, uključujući i poslednju šestu stranu kocke. Koliko ima nizova sa n cifara koji mogu biti rezultat eksperimenta?

80. Na koliko načina se mogu poredjati u niz 3 Amerikanca, 3 Engleza i 3 Rusa, tako da nikoja tri zemljaka ne stoje zajedno?

81. a) Koliko se reči, koje mogu da budu besmislene, dobija premeštanjem slova reči KOMBINATORIKA?

    b) Koliko ima takvih reči kod kojih nikoja dva ista slova nisu susedna?

82. a) Neka su p_1, p_2, $\ldots$, p_m različiti prosti brojevi, k_1, k_2, $\ldots$, k_m prirodni brojevi, $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ i $\varphi(n)$ broj prirodnih brojeva manjih od n i uzajamno prostih sa n. Dokazati da je $\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})$.

    b) Dokazati da za prirodne brojeve $m, n > 1$ važi $\varphi(m)\varphi(n) \leq \varphi(mn)$. Kada važi jednakost?

    c) $^+$ Dokazati da za proizvoljan prirodan broj n važi $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ (sumira se po svim prirodnim brojevima d koji dele n).

83. a) Na ples je došlo n bračnih parova. Na koliko načina oni mogu da oforme n plesnih parova tako da nijedan par supružnika ne igra zajedno?

    b) Svaki od lekara A i B treba da obavi pregled istih n pacijenata. Oba lekara počinju posao u isto vreme, a svaki od njih pregleda jednog pacijenta za 15 minuta. Na koliko načina se mogu rasporediti pacijenti, tako da svih $2n$ pregleda bude obavljeno već posle $\frac{n}{4}$ časova?

84. Naći broj permutacija koje imaju tačno k fiksnih tačaka.

85. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ koje nijedan paran broj ne slikaju u samog sebe?

86. $^+$ Na koliko načina n bračnih parova može sesti za okrugli sto sa $2n$ označenih stolica tako da supružnici ne sede jedno pored drugog?

87. $^+$ a) Naći broj ekvivalencija sa k klasa na skupu sa n elemenata.

    Uputstvo. Najpre rešiti problem za $k = 2, 3$ i $k = n-1, n-2$. U opštem slučaju, rezultat je suma.

    b) Naći ukupan broj B_n ekvivalencija na skupu sa n elemenata. Broj B_n se zove n-ti *Bell-ov broj.*

    c) Dokazati da je

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

    gde je $B_0 = 1$.

    d) Dokazati da je $B_n = \dfrac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{i^n}{i!}$.

Glava 2

Funkcije generatrise

2.1 Nalaženje funkcija generatrise

Stepeni red. Stepeni red je beskonačna suma oblika

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots,$$

gde su a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... realni brojevi, a x realna promenljiva.

Funkcija generatrisa. Neka je $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ niz realnih brojeva. Funkcija generatrisa $a(x)$ niza a je stepeni red

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

Funkcija $a(x)$ ima izvode svih redova u tački $x = 0$ i važi $a_k = \frac{a^{(k)}(0)}{k!}$.

Uopštena binomna teorema. Za proizvoljan realni broj α i proizvoljan nenegativni broj k, binomni koeficijent $\binom{\alpha}{k}$ se definiše pomoću

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

i pritom važi

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots$$

Neke poznate funkcije generatrise. U sledećim izrazima su date funkcije generatrise za neke poznate nizove:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 1\cdot x^n = \frac{1}{1-x}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\ x^n = \log\frac{1}{1-x}$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\ x^n = e^x$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\ x^{2n+1} = \sin x$

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\ x^{2n} = \cos x$

g) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{n}\ x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

h) $\displaystyle\sum_{n\geq k} \binom{n}{k}\ x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\ x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x$

j) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}\ x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$

k) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{2n+k}{n}\ x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k$

l) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{k!(2n+k-1)!}{n!(n+k)!}\ x^n = \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k$

m) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\ x^{2n+1} = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots = \arcsin x$

n) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\ x^n = e^x\sin x$

o) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4^n\, n!^2}{(n+1)(2n+1)!}\ x^n = \left(\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^2$

Operacije sa funkcijama generatrise. Neka su $a(x)$ i $b(x)$ funkcije generatrise za nizove $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ i $(b_0, b_1, b_2, \dots)$. Tada se pomoću $a(x)$ i $b(x)$ mogu odrediti funkcije generatrisa za sledeće operacije:

Sabiranje nizova: Niz $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ ima funkciju generatrisu $a(x) + b(x)$.

Množenje niza realnim brojem: Niz $(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$ ima funkciju generatrisu $\alpha a(x)$, gde je $\alpha \in \mathbf{R}$.

Pomeranje niza udesno: Niz $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n\times}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ ima funkciju generatrisu $x^n a(x)$, gde je $n \in \mathbf{N}$.

Pomeranje niza ulevo: Niz $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$, gde je $n \in \mathbf{N}$, ima funkciju generatrisu $\dfrac{a(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}}{x^n}$.

Zamena x sa αx: Niz $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^n a_n, \dots)$, gde je $\alpha \in \mathbf{R}$, ima funkciju generatrisu $a(\alpha x)$.

Zamena x sa x^n: Niz $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_2, \dots)$ ima funkciju generatrisu $a(x^n)$, gde je $n \in \mathbf{N}$.

Diferenciranje: Funkcija generatrisa za niz $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, (n+1)a_{n+1}, \dots)$ je izvod $a'(x)$ funkcije $a(x)$.

Integracija: Funkcija generatrisa za niz $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_{n-1}}{n-1}, \dots)$ je odredjeni integral $\int_0^x a(t)dt$.

Množenje funkcija generatrise: Proizvod $a(x)b(x)$ je funkcija generatrisa za niz $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$, gde je $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$.

Zadaci

88. Naći koeficijent uz:

    (a) x^5 u $(1 - 2x)^{-2}$.

    (b) x^4 u $\sqrt[3]{1 + x}$.

    (c) x^3 u $(2 + x)^{3/2}/(1 - x)$.

    (d) x^9 u $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$.

89. Naći koeficijent uz x^n u stepenom razvoju sledećih funkcija, koristeći metod parcijalnih razlomaka ili operacije za rad sa funkcijama generatrisa:

    (a) $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$, $\quad a \neq b$.

    (b) $\frac{1}{1-6x+11x^2-6x^3}$.

    (c) $\frac{1}{(1-x^2)^2}$.

(d) $\frac{1-x-x^2}{(1-2x)(1-x)^2}$.

90. Naći funkciju generatrisu za svaki od sledećih nizova (svaki od nizova je definisan za sve $n \geq 0$):

(a) $a_n = n$;

(b) $a_n = \alpha n + \beta$;

(c) $a_n = n^2$;

(d) $a_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$;

(e) $a_n = 3^n$;

(f) $a_n = 5 \cdot 7^n - 3 \cdot 4^n$.

91. Naći funkciju generatrisu za sledeće nizove:

(a) $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$;

(b) $(2^{1+[n/3]})_{n\geq 0} = (2, 2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8, \dots)$;

(c) $(\frac{1}{(n+5)!})_{n\geq 0}$;

(d) $(\frac{n^2+n+1}{n!})_{n\geq 1}$.

92. Dokazati da je:

a) $\sum_n \binom{m}{2n} x^{2n} = \frac{1}{2}\left((1+x)^m + (1-x)^m\right)$;

b) $\sum_n \binom{m}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{1}{2}\left((1+x)^m - (1-x)^m\right)$.

93. Dokazati da je:

a) $\sum_n \binom{2n}{m} x^{2n} = \frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}}\right)$;

b) $\sum_n \binom{2n+1}{m} x^{2n+1} = \frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}}\right)$.

94. Neka je a_n broj uredjenih trojki (i, j, k) celih brojeva tako da je $i \geq 0$, $j \geq 1$, $k \geq 1$ i $i + 3j + 5k = n$. Naći funkciju generatrisu za niz $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ i opštu formulu za a_n.

95. Naći funkciju generatrisu za broj b_n celih brojeva u opsegu 0 do $10^m - 1$ čija je suma cifara jednaka n.

96. (a) Neka je $a = (a_n)_{n\geq 0}$ dati niz i neka je S operator koji preslikava niz a u niz Sa njegovih parcijalnih suma: $(Sa)_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, za $n \geq 0$. Ako je $f(x)$ funkcija generatrisa za niz a, dokazati da je $\frac{f(x)}{1-x}$ funkcija generatrisa za niz Sa.

(b) Naći funkciju generatrisu za *harmonijske brojeve* H_n, $n \geq 1$, definisane pomoću:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(c) Ako je $r \geq 0$, naći funkciju generatrisu za $S^r a$, tj. za $S(S(\dots(Sa)\dots))$.

(d) Nepoznati niz a ima sledeće svojstvo: kada, počevši od a, r puta ponovimo operaciju S, tada kao rezultat dobijamo niz $(1, 0, 0, 0, \dots)$. Naći početni niz a.

2.2 Rekurentne jednačine

Rekurentna jednačina. Rekurentna jednačina reda k je jednačina oblika

$$F(a_{n+k}, a_{n+k-1}, \dots, a_{n+1}, a_n) = 0,$$

koja važi za proizvoljan ceo broj $n \geq 0$, gde je $F\colon \mathbf{R}^{k+1} \mapsto \mathbf{R}$ funkcija $k+1$ realnih promenljivih, a $(a_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva, uz početne uslove

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1, \quad \dots \quad a_{k-1} = c_{k-1},$$

gde su c_0, c_1, …, c_{k-1} realne konstante.

Rešenje rekurentne jednačine je svaki niz $(a_n)_{n\geq 0}$ koji zadovoljava rekurentnu jednačinu i početne uslove. Opšte rešenje rekurentne jednačine je funkcija $S\colon \mathbf{R}^k \mapsto \mathbf{R}^\infty$, tako da $S(c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$ predstavlja jedno od rešenja rekurentne jednačine sa početnim uslovima $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, …, $a_{k-1} = c_{k-1}$.

Linearna rekurentna jednačina. Linearna rekurentna jednačina reda k je rekurentna jednačina oblika

$$\alpha_0 a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \cdots + \alpha_k a_n = f(n).$$

Linearna rekurentna jednačina je *homogena* ako je $f(n) = 0$ za svako $n \geq 0$.

Rešavanje homogene linearne rekurentne jednačine. Karakteristična jednačina homogene linearne rekurentne jednačine je jednačina

$$\alpha_0 t^k + \alpha_1 t^{k-1} + \alpha_2 t^{k-2} + \cdots + \alpha_k = 0.$$

Ako karakteristična jednačina ima različite korene x_1, x_2, …, x_r sa višestrukostima m_1, m_2, …, m_r, redom, tada rekurentna jednačina ima jedinstveno rešenje oblika

$$\begin{aligned} a_n &= (A_{1,0} + A_{1,1}n + \cdots + A_{1,m_1-1}n^{m_1-1}) \cdot \alpha_1^n \\ &+ (A_{2,0} + A_{2,1}n + \cdots + A_{2,m_2-1}n^{m_2-1}) \cdot \alpha_2^n \\ &+ \dots \\ &+ (A_{r,0} + A_{r,1}n + \cdots + A_{l,m_r-1}n^{m_r-1}) \cdot \alpha_r^n, \end{aligned}$$

gde su A_{i,j_i}, $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j_i \leq m_i - 1$ realne konstante.

Rešavanje nehomogene linearne rekurentne jednačine. Neka je data linearna rekurentna jednačina reda k

$$\alpha_0 a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \cdots + \alpha_k a_n = f(n).$$

Za funkciju generatrisu $A(t)$ rešenja jednačine $(a_n)_{n\geq 0}$ važi

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_k t^k) \cdot A(t) = \sum_{i=k}^{\infty} f(i) t^i + P(t),$$

gde je

$$P(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{i} \alpha_{i-j} a_j \right) t^i.$$

Fibonačijevi brojevi. Niz brojeva $(F_n)_{n\geq 0}$ koji zadovoljava $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$, uz početne uslove $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ naziva se niz Fibonačijevih brojeva. Rešavanjem ove rekurentne jednačine dobija se da je opšti član jednak

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Zadaci

97. Naći funkciju generatrisu niza $(a_n)_{n\geq 0}$ ako on zadovoljava datu rekurentnu relaciju i odatle naći opšti član niza:

    (a) $a_{n+1} = 3a_n + 2, \quad a_0 = 0.$

    (b) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$

    (c) $a_{n+2} = -4a_{n+1} - 8a_n, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 2.$

    (d) $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n, \quad a_0 = 2,\ a_1 = 0,\ a_2 = -2.$

98. Neka je niz (z_n) definisan pomoću

    $$z_0 = 1, \quad z_{n+1} = \frac{z_n - a}{z_n - b}, \quad n \geq 0,$$

    gde su a i b realni brojevi i $b \neq 1$. Dokazati da ako za niz (u_n) važi

    $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = z_n - b,$$

    tada je

    $$u_{n+2} + (b-1)u_{n+1} + (a-b)u_n = 0, \quad n \geq 0.$$

    Naći eksplicitnu formulu za z_n u slučaju $a = 0$ i $b = 2$.

99. Neka su nizovi (u_n), (v_n) i (w_n) definisani pomoću $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ i

    $$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}, \quad n \geq 0.$$

    Dokazati da (u_n) zadovoljava homogenu linearnu rekurentnu relaciju i naći opštu formulu za u_n.

100. U nizu $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ svaki član, počev od trećeg, je aritmetička sredina prethodna dva člana, tj. $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$. Odrediti $\lim_{n \mapsto \infty} a_n$ u funkciji od a_0 i a_1.

101. Neka je q_n broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d, koje sadrže neparan broj slova b. Dokazati da je

$$q_{n+1} = 2q_n + 4^n, \quad n \geq 1$$

i, uz pretpostavku $q_0 = 0$, naći funkciju generatrisu $Q(x)$ i dokazati da je

$$q_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n).$$

102. Naći opštu formulu za sledeće nizove:

(a) $x_0 = x_1 = 0, \quad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^n.$

(b) $x_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 3 \cdot 2^n.$

(c) $x_0 = x_1 = 0, \quad x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n + n.$

103. Rešiti rekurentnu jednačinu $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0$ sa početnim uslovom $a_0 = 1$.

104. $^+$ Naći broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d tako da slovo a nikad nije susedno slovu b.

105. $^+$ Neka je p permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, zapisana u jednolinijskoj notaciji i sa označenim *rastućim segmentima* u tako dobijenom nizu brojeva: na primer, $(\underline{4\ 5\ 7}\ \underline{2\ 6\ 8}\ \underline{3}\ \underline{1})$. Neka $f(n, k)$ označava broj permutacija skupa sa n elemenata koje imaju tačno k rastućih segmenata. Ovo su tzv. Ojlerovi brojevi.

a) Dokazati da je $f(n, k) = f(n, n+1-k)$ i zaključiti da je prosečan broj rastućih segmenata u permutaciji $(n+1)/2$ (prosečan broj se računa na osnovu svih permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$).

b) Dokazati sledeću rekurentnu formulu:

$$f(n, k) = k \cdot f(n-1, k) + (n+1-k) \cdot f(n-1, k-1).$$

c) Odrediti broj permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ sa 1, 2 i 3 rastuća segmenta korišćenjem prethodne jednakosti.

106. Niz f_n je definisan za sve $n \geq 1$ pomoću relacija: (a) $f_1 = 1$; (b) $f_{2n} = f_n$ i (c) $f_{2n+1} = f_n + f_{n+1}$. Neka je

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} f_n x^{n-1}$$

funkcija generatrisa ovog niza. Dokazati da je

$$F(x) = (1 + x + x^2) F(x^2).$$

107. Predstaviti sledeće nizove pomoću Fibonačijevih brojeva F_n:

(a) $a_0 = r, \quad a_1 = s, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 0.$

(b) $b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + c, \quad n \geq 0.$

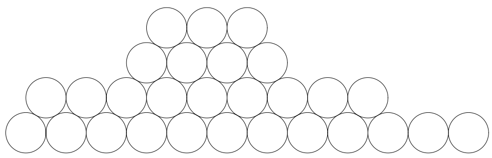
(c) $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + \binom{n}{m}, \quad n \geq 0,$
gde je m dati prirodan broj.

(d) $b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_{n+2} = b_{n+1} \cdot b_n, \quad n \geq 0.$

108. (a) Za prirodan broj n, neka je f_n broj podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji ne sadrže par uzastopnih brojeva. Naći rekurentnu relaciju koju zadovoljavaju ovi brojevi, a zatim naći i same brojeve.

(b) Za prirodne brojeve n i k, neka je $f_{n,k}$ broj k-podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koji ne sadrže par uzastopnih brojeva. Naći rekurentnu relaciju koju zadovoljavaju ovi brojevi, a zatim naći odgovarajuću funkciju generatrisu i same brojeve.

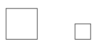
109. (a) Pod *gomilom* novčića se podrazumeva raspored n novčića u redove tako da novčići u prvom redu čine neprekidan niz, a da u višim redovima svaki novčić dodiruje tačno dva novčića iz prethodnog reda. Ako prvi red sadrži k novčića, tada se gomila označava kao (n, k)-gomila. Na slici je prikazana $(28, 12)$-gomila.

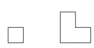


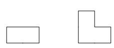
Blok gomila novčića je gomila u kojoj se svaki red sastoji od samo jednog neprekidnog niza novčića. Neka je f_k broj blok gomila koje u prvom redu sadrže tačno k novčića, $k \geq 0$. Odrediti funkciju generatrisu za niz $(f_k)_{k \geq 0}$.

(b) Dokazati da je $f_k = F_{2k-1}$ za $k \geq 1$, gde je $(F_n)_{n \geq 0}$ niz Fibonačijevih brojeva.

110. ("Mini Tetris") Naći funkciju generatrisu i rekurentnu relaciju za broj načina na koji se može u potpunosti prekriti pravougaonik dimenzija $n \times 2$ pomoću delova sledećeg tipa (tako da se delovi ne preklapaju). Dužine ivica delova su 1 i 2; delovi mogu da se rotiraju za ceo umnožak pravog ugla.

(a)  Kvadrati 2×2 i 1×1.

(b)  Kvadrat 1×1 i L-figura.

(c) +  Pravougaonik 1×2 i L-figura.

2.3 Particije prirodnih brojeva

Particije prirodnih brojeva. Particija π broja n, $n \in \mathbf{N}$, u k delova, $k \geq 1$, je familija $\pi = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, tako da važi $n_i \in \mathbf{N}$ za svako $i = 1, 2, \ldots, k$ i

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Ako particija $\pi = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ sadrži α_i delova jednakih i, $i = 1, 2, \ldots, k$, tada particiju π zapisujemo na sledeći način

$$\pi = [1^{\alpha_1}\ 2^{\alpha_2}\ \ldots\ n^{\alpha_n}].$$

Fererovi dijagrami. Particija π broja n predstavlja se pomoću Fererovog dijagrama tako što se delovi particije poredjaju po veličini, počevši od najvećeg, a zatim se svaki deo predstavlja kao vrsta sa odgovarajućim brojem simbola. Drugim rečima, Fererov dijagram particije $\pi = [1^{\alpha_1}\ 2^{\alpha_2}\ \ldots\ n^{\alpha_n}]$ sastoji se od α_n vrsta sa po n simbola, α_{n-1} vrsta sa po $n-1$ simbola, ... i α_1 vrsta sa po jednim simbolom.

Konjugovana particija. Konjugovana particija π' particije π dobija se zamenom uloga vrsta i kolona u Fererovom dijagramu particije π. Particija π je *samokonjugovana* ako je $\pi = \pi'$.

Funkcija generatrisa za broj particija. Neka je $p(n)$ ukupan broj particija broja n, $n \in \mathbf{N}$. Funkcija generatrisa niza brojeva $p(n)$ jednaka je

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)^{-1}.$$

Zadaci

111. Nacrtati Fererove dijagrame za sledeće particije:

$$[1^2\ 3^2\ 5\ 7], \quad [2\ 4\ 6^2\ 7].$$

112. Izračunati vrednosti za $p(n)$, $1 \leq n \leq 7$.

113. Izračunati $p_5(9)$ i $p_5(10)$, gde je $p_k(n)$ broj particija n na k sabiraka.

114. Neka je $p_k(n)$ broj particija n na k sabiraka. Dokazati da je

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \cdots + p_1(n-k),$$

i iskoristiti ovu formulu za nalaženje $p(8)$.

115. (a) Odrediti konjugovane particije sledećih particija u standardnoj notaciji:

$$[1^2\ 3\ 5\ 6], \quad [2^2\ 3^3\ 5\ 8].$$

(b) Koje od sledećih particija su samo-konjugovane:

$$[1^2\ 2\ 4], \quad [1^3\ 4\ 5\ 6], \quad [2^2\ 3\ 5^2], \quad [1^4\ 2\ 3\ 4\ 8]?$$

116. Dokazati da je broj samo-konjugovanih particija n jednak broju particija n u kojima su sabirci različiti i neparni.

117. Koristeći Fererov dijagram, dokazati da je broj particija n u kojima je svaki sabirak jednak 1 ili 2, jednak broju particija $n+3$ koje imaju tačno dva različita sabirka.

118. Naći funkcije generatrise za brojeve particija n:

    (a) u kojima je svaki sabirak jednak 3 ili 4.
    (b) u kojima je svaki sabirak najviše 5.
    (c) u kojima je svaki sabirak stepen broja 2.
    (d) u kojima se svaki sabirak pojavljuje najviše dva puta.
    (e) u kojima se svaki sabirak pojavljuje najviše tri puta.
    (f) u kojima se samo neparni sabirci mogu pojaviti više od jedanput.
    (g) u kojima je svaki sabirak deljiv sa 3.

    Da li su brojevi particija n u (e) i (f) jednaki?

119. Dokazati da je

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2m}) = 1-x^{2^{m+1}},$$

pa na osnovu toga, dokazati formulu

$$(1-x)^{-1} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})\cdots$$

Na osnovu ovoga, zaključiti da svaki prirodan broj ima jedinstvenu particiju na sabirke koji su različiti stepeni broja 2.

2.4 Katalanovi brojevi

Korektni nizovi zagrada. Skup korektnih nizova zagrada rekurzivno se definiše na sledeći način:

i) Prazan niz zagrada je korektan.

ii) Ako su A i B korektni nizovi zagrada, tada je i niz AB (dobijen spajanjem nizova A i B) korektan niz zagrada.

iii) Ako je A korektan niz zagrada, tada je i niz (A) korektan niz zagrada.

iv) Svaki korektan niz zagrada se može dobiti primenom pravila i)-iii).

Niz zagrada $z_1 z_2 \dots z_{2n}$ je korektan ako i samo ako je broj levih zagrada veći ili jednak broju desnih zagrada u podnizu $z_1 z_2 \dots z_i$ za svako $i = 1, 2, \dots, 2n$.

Katalanovi brojevi. Broj korektnih nizova sa n parova zagrada jednak je *Katalanovom broju* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Funkcija generatrisa za niz Katalanovih brojeva je

$$C(x) = \sum_n C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Korensko stablo. Skup T u kome je definisana relacija "biti naslednik" i u kome postoji element r tako da su svi ostali elementi T naslednici elementa r naziva se *korensko stablo.* Elementi korenskog stabla nazivaju se *čvorovi*, a element r naziva se *koren* stabla. Čvor bez naslednika naziva se *list.*

Podstablo T_s u čvoru s, $s \in T$, je podskup korenskog stabla T koji čine čvor s i svi njegovi naslednici, uz zadržavanje relacije "biti naslednik" sa skupa S.

Korensko stablo se vizuelno predstavlja tako što se svaki čvor, počevši od korena stabla, predstavlja tačkom u ravni i spaja linijom sa svakim od svojih direktnih naslednika, koji se postavljaju ispod njega.

Unija jednog ili više korenskih stabala zove se *korenska šuma.*

Uredjeno stablo. Korensko stablo u kome je odredjen poredak naslednika svakog čvora zove se *uredjeno stablo.*

Poziciono binarno stablo. Korensko stablo T, kod kojeg svaki čvor može da ima jedinstvenog *levog* i *desnog* naslednika, naziva se *poziciono binarno stablo.*

Levo podstablo čvora t, $t \in S$, je podstablo u njegovom levom nasledniku, a *desno podstablo* čvora t je podstablo u njegovom desnom nasledniku.

Zadaci

120. Konstruisati poziciono binarno stablo koje odgovara sledećem korektnom nizu od 11 parova zagrada:

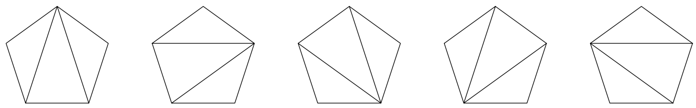
$$((((())()))())(())(())().$$

121. Ispred blagajne koncertne dvorane je grupa od $2n$ osoba. Svaka osoba želi da kupi samo jednu kartu, koja košta 50 dinara. Od njih, n osoba ima novčanicu od 100 dinara, a preostalih n osoba ima novčanicu od 50 dinara. Na početku, blagajnik nema novca u kasi. Na koliko načina se tih $2n$ osoba može poredjati u red, tako da blagajnik može uvek da, uz kartu, vrati i kusur od 50 dinara osobama koje imaju novčanice od 100 dinara?

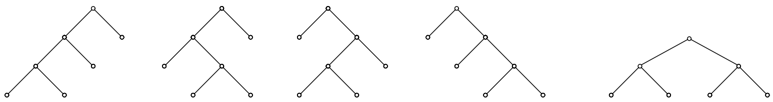
Dokazati da Katalanovi brojevi C_n predstavljaju broj elemenata svakog od sledećih 13 skupova S_i, $i = a, b, \dots, m$, u zadacima 122–134. Elementi svakog skupa S_i su ilustrovani za $n = 3$, u nadi da će ilustracije otkloniti eventualne nejasnoće u definicijama. Idealno, trebalo bi dokazati da S_i i S_j

imaju isti broj elemenata konstruisanjem jednostavne, elegantne bijekcije $\phi_{ij}\colon S_i \mapsto S_j$ za svaki par i, j ...

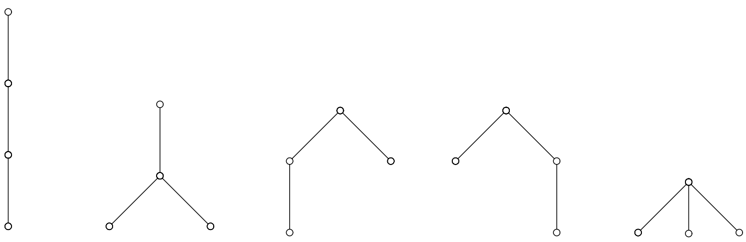
122. $^+$ S_a: triangulacije konveksnog $(n+2)$-gona na n trouglova pomoću $n-1$ dijagonala koje nemaju zajedničkih tačaka u unutrašnjosti $(n+2)$-gona.



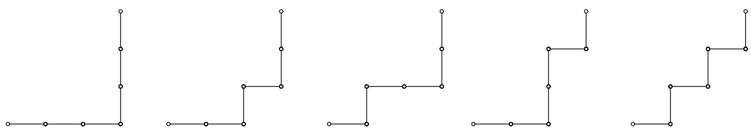
123. S_b: uredjena binarna stabla sa $2n+1$ čvorova i $n+1$ listova.



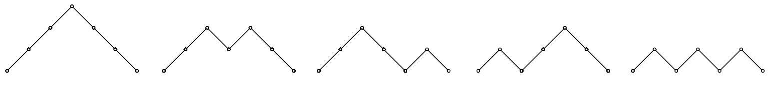
124. S_c: uredjena stabla sa $n+1$ čvorova.



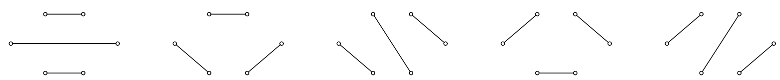
125. S_d: putevi u celobrojnoj mreži od $(0,0)$ do (n,n) sa koracima $(0,1)$ ili $(1,0)$, koji nikada ne idu iznad prave $y=x$.



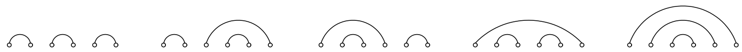
126. S_e: Dikovi putevi od $(0,0)$ do $(2n,0)$, tj. putevi u celobrojnoj mreži sa koracima $(1,1)$ i $(1,-1)$, koji nikada ne idu ispod x-ose.



127. S_f: n disjunktnih tetiva koje spajaju $2n$ tačaka na kružnici.



128. S_g: načini da se u ravni poveže $2n$ tačaka koje leže na horizontalnoj pravoj pomoću n disjunktnih lukova, tako da svaki luk povezuje dve od datih tačaka i leži iznad svih tačaka.



129. S_h: nizovi od n brojeva 1 i n brojeva -1 tako da je svaka suma prvih k brojeva, $k \leq 2n$, nenegativna (gde je -1 označen samo kao $-$):

$$111---\quad 11-1--\quad 11--1-\quad 1-11--\quad 1-1-1-$$

130. S_i: nizovi $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ celih brojeva sa $a_i \leq i$.

111 112 113 122 123

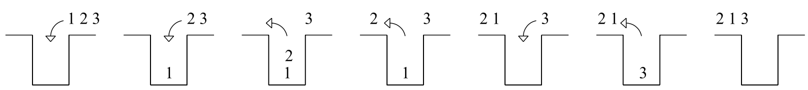
131. S_j: nizovi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ celih brojeva tako da je $a_1 = 0$ i $0 \leq a_{i+1} \leq a_i + 1$.

000 001 010 011 012

132. S_k: permutacije $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$ skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ tako da: (i) $1, 3, \ldots, 2n-1$ se pojavljuju u rastućem poretku, (ii) $2, 4, \ldots, 2n$ se pojavljuju u rastućem poretku i (iii) $2i-1$ se pojavljuje pre $2i$, $1 \leq i \leq n$.

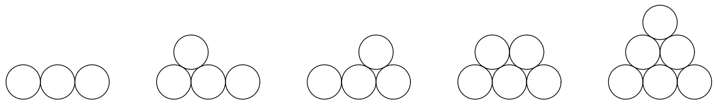
123456 123546 132456 132546 135246

133. S_l: *stek-permutacije* $a_1 a_2 \ldots a_n$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koje mogu da se dobiju od identičke permutacije $12 \ldots n$ koristeći stek: brojevi $1, 2, \ldots, n$ se redom stavljaju na stek, a skidaju sa steka u proizvoljnim trenucima, s tim što nije moguće skinuti broj sa praznog steka. Na primer:



123 132 213 231 321

134. $^{+}$ S_m: načini da se novčići poredjaju u ravni, tako da prvi red sadrži n novčića.



2.5 Metod zmijskog ulja

Metod zmijskog ulja.[1] Neka je data kombinatorna suma S koju treba izračunati. *Metod zmijskog ulja* za nalaženje vrednosti sume S sastoji se od sledećih koraka:

a) Identifikovati slobodnu promenljivu od koje zavisi suma S, npr. n. Neka je $f(n)$ vrednost sume S.

b) Neka je $F(x)$ funkcija generatrisa niza $f(n)$.

c) Pomnožiti sumu S sa x^n i sumirati po n. Funkcija generatrisa je sada dupla suma: spoljašnja je po n, a unutrašnja je prvobitna suma S.

d) Zameniti redosled sumiranja i naći vrednost unutrašnje sume po n.

e) Identifikovati koeficijente dobijenog izraza za funkciju generatrisu, jer oni predstavljaju vrednost sume S u zavisnosti od n.

Pri upotrebi metoda zmijskog ulja, najčešće se nailazi na sledeće funkcije generatrise: $\sum_n \binom{m}{n} x^n$ (binomna teorema), $\sum_n \binom{n}{k} x^n$ (funkcija g) u poglavlju 2.1), njihove varijante kada n uzima samo parne ili samo neparne vrednosti (zadaci 92 i 93), kao i $\sum_n \binom{2n}{n} x^n$ (funkcija i) u poglavlju 2.1).

Zadaci

135. Rešiti zadatak 69 iz poglavlja 1.5 metodom zmijskog ulja.

136. Dokazati da je

$$\sum_r \binom{n}{\left[\frac{r}{2}\right]} x^r = (1+x)(1+x^2)^n.$$

Koristeći metod zmijskog ulja izračunati

$$\sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} y^k$$

u eksplicitnom obliku kada je $y = \pm 2$.

Metodom zmijskog ulja rešiti sledeće zadatke.

137. Dokazati da je za sve $n \geq 0$

$$\sum_k \binom{n}{k} \binom{k}{j} x^k = \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j}.$$

[1] Ovaj pomalo čudan naziv postaje mnogo jasniji ako znamo da je metod nastao i dobio naziv u Americi, gde je zmijsko ulje navodno svemoćni univerzalni lek američkih indijanaca.

138. Dokazati da je

$$\sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}.$$

139. Dokazati da je

$$\sum_k (-1)^{n-k}\binom{2n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

predstavljajući ovu sumu kao specijalan slučaj sume sa dva slobodna parametra i primenjujući metod zmijskog ulja na drugi slobodan parametar.

140. Dokazati da je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}.$$

141. Dokazati da je za $n \geq 1$

$$\sum_{k\geq 1} \binom{n+k-1}{2k-1}\frac{(x-1)^{2k}x^{n-k}}{k} = \frac{(x^n-1)^2}{n}.$$

142. $^{+}$ Izračunati

$$\sum_k \binom{2n+1}{2p+2k+1}\binom{p+k}{k}.$$

Time se dobija "Morijartijev identitet".

Glava 3

Teorija grafova

3.1 Šta je graf?

Graf. Graf G je uredjeni par (V, E), gde je $E \subseteq \binom{V}{2}$, gde je $\binom{V}{2}$ skup svih dvoelementnih podskupova skupa V. Elementi skupa V se zovu *čvorovi*, a elementi skupa E *grane* grafa G. Ako je $e = \{u, v\} \in E$, tada su u i v *krajevi* grane e, a kaže se i da su čvorovi u i v *susedni*, odnosno da je čvor u sused čvora v (i obratno). Grana $e = \{u, v\}$ se skraćeno piše $e = uv$. Za dati graf G, skup čvorova se označava sa $V(G)$, a skup grana sa $E(G)$.

Crtež grafa. Graf $G = (V, E)$ može se vizuelno predstaviti tako što se svaki čvor $v \in V$ predstavi kao tačka u ravni, a svaka grana $e = uv \in E$ kao Žordanova kriva čije krajnje tačke predstavljaju čvorove u i v.

Posebne klase grafova.

Put sa n čvorova je graf P_n, $n \in \mathbf{N}$, sa skupom čvorova $\{1, 2, \dots, n\}$ i skupom grana $\{\{i, i+1\} : i = 1, 2, \dots, n-1\}$.

Ciklus sa n čvorova je graf C_n, $n \in \mathbf{N}$, sa skupom čvorova $\{1, 2, \dots, n\}$ i skupom grana $\{\{i, i+1\} : i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{n, 1\}$.

Kompletan graf sa n čvorova je graf K_n, $n \in \mathbf{N}$, sa skupom čvorova $\{1, 2, \dots, n\}$ i skupom grana $\binom{\{1,2,\dots,n\}}{2}$.

Kompletan m-partitni graf je graf $K_{n_1, n_2, \dots, n_m}$, $m \in \mathbf{N}$, $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbf{N}$, sa skupom čvorova $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$ i skupom grana $\{uv : u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$, gde su V_1, V_2, …, V_m disjunktni skupovi takvi da je $|V_i| = n_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Okoline i stepeni. Pod *otvorenom okolinom* čvora u grafa $G = (V, E)$ podrazumeva se skup $N_G(u) = \{v \in V : \{u, v\} \in E\}$ suseda čvora u. Pod *zatvorenom okolinom* čvora u podrazumeva se skup $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$.

Stepen čvora u je broj $d_G(u) = |N_G(u)|$ suseda čvora u. Zbir $\sum_{u \in V} d_G(u)$ stepena svih čvorova grafa G jednak je dvostrukom broju grana grafa G (pa je stoga i broj čvorova neparnog stepena paran).

Najmanji stepen grafa G je $\delta(G) = \min_{u \in V} d_G(u)$, a najveći stepen grafa G je $\Delta(G) = \max_{u \in V} d_G(u)$. Graf G je r-regularan, $r \in \mathbf{N}$, ako je $\delta(G) = \Delta(G) = r$. Graf G je regularan ako postoji $r \in \mathbf{N}$ tako da je G r-regularan graf.

Matrica susedstva. *Matrica susedstva* $A = A_G$ grafa $G = (V, E)$ je kvadratna matrica čije su vrste i kolone indeksirane skupom čvorova V i važi da je

$$A_{uv} = \begin{cases} 1, & uv \in E \\ 0, & uv \notin E \end{cases}$$

Matrica incidentnosti. *Matrica incidentnosti* $M = M_G$ grafa $G = (V, E)$ je matrica čije su vrste indeksirane skupom čvorova V, a kolone su indeksirane skupom grana E i važi da je

$$M_{ve} = \begin{cases} 1, & v \in e \\ 0, & v \notin e \end{cases}$$

Izomorfizam grafova. Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su *izomorfni* ako postoji bijekcija $f\colon V_1 \mapsto V_2$ tako da je $\{u, v\} \in E_1$ ako i samo ako je $\{f(u), f(v)\} \in E_2$. Ako su G_1 i G_2 izomorfni, onda pišemo $G_1 \equiv G_2$.

Automorfizam grafa. *Automorfizam* grafa $G = (V, E)$ je izomorfizam grafa G sa samim sobom, tj. svaka bijekcija $f\colon V \mapsto V$ tako da je $\{u, v\} \in E$ ako i samo ako je $\{f(u), f(v)\} \in E$.

Graf se naziva *asimetričan* ako je njegov jedini automorfizam identičko preslikavanje (kada se svaki čvor slika u samog sebe).

Podgraf. Graf $G' = (V', E')$ je *podgraf* grafa $G = (V, E)$ ako važi $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E \cap \binom{V}{2}$. Graf G je nadgraf grafa G' ako je G' podgraf grafa G.

Ako je $e \in E$, onda se sa $G - e$ označava podgraf $(V, E \setminus \{e\})$. Ako je $e \notin E$, onda se sa $G + e$ označava nadgraf $(V, E \cup \{e\})$.

Indukovani podgraf. Graf $G' = (V', E')$ je *indukovani podgraf* grafa $G = (V, E)$ ako važi $V' \subseteq V$ i $E' = E \cap \binom{V}{2}$. Za graf G' se kaže i da je *podgraf indukovan podskupom čvorova* V'.

Ako je $S \subseteq V$, onda se sa $G - S$ označava podgraf indukovan podskupom čvorova $V \setminus S$. Ako je $S = \{u\}$, tada se skraćeno piše $G - u$.

Klika i nezavisan skup. Podskup $C \subseteq V$ čvorova grafa $G = (V, E)$ je *klika* ako su svaka dva čvora $x, y \in C$, $x \neq y$, susedna u G.

Podskup $C \subseteq V$ čvorova grafa $G = (V, E)$ je *nezavisan skup* ako nikoja dva čvora $x, y \in C$, $x \neq y$, nisu susedna u G.

Šetnje medju čvorovima. *Šetnja* W *dužine* k u grafu $G = (V, E)$ je niz v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, $\ldots$, e_k, v_k čvorova i grana tako da je $e_i = v_{i-1}v_i$ za $i = 1, 2, \ldots, k$. Čvorovi v_0 i v_k su *krajnji čvorovi* (*krajevi*) šetnje W, a kaže se i da je W šetnja izmedju čvorova v_0 i v_k. Šetnja je *zatvorena* ako je $v_0 = v_k$.

Staza je šetnja u kojoj se nijedna grana ne ponavlja. *Put* je šetnja u kojoj se nijedan čvor ne ponavlja. *Ciklus* (ili *kontura*) je zatvorena staza u kojoj se nijedan čvor ne ponavlja, izuzev prvog i poslednjeg.

Povezanost grafova. Čvorovi u i v grafa G su *povezani* ako u G postoji put čiji su krajnji čvorovi u i v. Graf G je *povezan* ako su svaka dva njegova čvora povezana. Graf G je nepovezan ako G nije povezan. *Komponente* grafa G su njegovi maksimalni povezani podgrafovi.

Graf $G = (V, E)$ je povezan ako i samo ako za svaku particiju $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1, V_2 \neq \emptyset$, postoji grana $e \in E$ koja spaja čvor iz V_1 sa čvorom iz V_2, tj. za koju je $|e \cap V_1| = 1$ i $|e \cap V_2| = 1$.

Presecajući čvorovi i grane. Čvor $v \in V(G)$ grafa G zove se *presecajući čvor* (ili *artikulacioni čvor*) ako $G - v$ ima više komponenti povezanosti od G. Grana $e \in E(G)$ grafa G zove se *presecajuća grana* (ili *most*) ako $G - e$ ima više komponenti povezanosti od G.

Rastojanje izmedju čvorova. Ako su čvorovi u i v grafa G povezani, tada je *rastojanje* $d_G(u, v)$ od čvora u do čvora v jednako dužini najkraćeg puta izmedju čvorova u i v. Ako čvorovi u i v nisu povezani, onda je rastojanje $d_G(u, v) = \infty$.

Dijametar $D(G)$ grafa $G = (V, E)$ je $\max_{u,v \in V} d_G(u, v)$. *Ekscentricitet* $\epsilon_G(u)$ čvora u je $\max_{v \in V} d_G(u, v)$. *Radijus* $r(G)$ grafa G je $\min_{u \in V} \epsilon_G(u)$. *Centar* grafa G čine čvorovi čiji je ekscentricitet jednak radijusu.

Bipartitnost. Graf $G = (V, E)$ je bipartitan ako postoji particija skupa čvorova $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tako da za svaku granu $e \in E$ važi da ona spaja čvor iz V_1 sa čvorom iz V_2, tj. da je $|e \cap V_1| = 1$ i $|e \cap V_2| = 1$.

Graf G je bipartitan ako i samo ako ne sadrži cikluse neparne dužine.

Komplement. *Komplement* $\overline{G}$ grafa $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Zadaci

143. a) Postoji li graf sa stepenima čvorova 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6?

b) Postoji li bipartitni graf sa stepenima čvorova 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6?

c) Postoji li graf sa stepenima čvorova 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9?

144. U ligi koja se sastoji od dve grupe sa po 13 timova u svakoj grupi, odrediti da li je moguće napraviti raspored utakmica u sezoni tako da svaki tim odigra devet utakmica protiv timova iz svoje grupe i četiri utakmice protiv timova iz suprotne grupe.

145. $^-$ Dokazati ili opovrgnuti:

a) Brisanje čvora najvećeg stepena ne može da poveća prosečnu vrednost stepena čvorova.

b) Brisanje čvora najmanjeg stepena ne može da smanji prosečnu vrednost stepena čvorova.

146. a) Dokazati da u svakom grafu postoje dva čvora istog stepena.

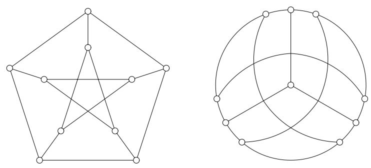
b) Na šahovskom turniru svaki igrač je odigrao sa svakim drugim igračem najviše jednu partiju. Dokazati da u svakom trenutku na turniru postoje bar dva igrača koji su do tog trenutka odigrali isti broj partija.

147. $^+$ U grafu sa n čvorova svi stepeni su različiti izuzev stepena s koji se pojavljuje dva puta. Odrediti s.

148. $^-$ Ispisati sve moguće matrice susedstva za put sa tri čvora i ciklus sa tri čvora.

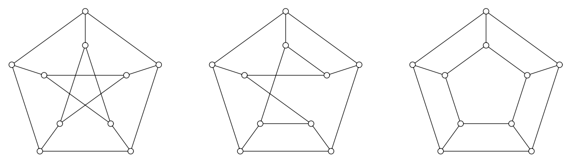
149. $^-$ Ispisati bar jednu matricu susedstva za grafove K_n i $K_{m,n}$, $m, n \in N$.

150. a) Pronaći izomorfizam izmedju sledećih grafova:



b) Dokazati da su oba grafa izomorfna sa sledećim grafom: skup čvorova je $\binom{\{1,2,\ldots,5\}}{2}$, a dva čvora $\{i,j\}$ i $\{k,l\}$ su susedna, $i,j,k,l \in \{1,2,\ldots,5\}$, ako i samo ako je $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$. Zajedničko ime za ove grafove je Petersenov graf.

151. Dokazati da su grafovi na slici medjusobno neizomorfni.



152. Naći sve neizomorfne grafove sa stepenima čvorova 6, 3, 3, 3, 3, 3, 3. Dokazati da nijedan takav graf nije izostavljen!

153. Naći sve neizomorfne 4-regularne grafove sa 7 čvorova.

154. Koliko grafova na skupu čvorova $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ je izomorfno sa grafom koji se sastoji od n disjunktnih grana $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$?

155. Za $n \in \mathbf{N}$ naći broj automorfizama grafova: a) P_n; b) C_n; c) K_n.

156. a) Dokazati da ne postoji asimetričan graf G za koji je $2 \leq |V(G)| \leq 5$.

b) Naći primer asimetričnog grafa sa bar 6 čvorova.

c) Naći 3-regularan asimetričan graf.

157. Dokazati da graf čiji su svi čvorovi parnog stepena ne sadrži most.

158. Koliko najviše grana ima graf sa n čvorova i k komponenti povezanosti?

159. a) Ako graf G ima n čvorova, $n \geq 3$, i $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, tada je G povezan.

    b) Pretpostavimo da je G graf sa najvećim stepenom $\lceil n/2 \rceil$ i najmanjim stepenom $\lfloor n/2 \rfloor - 1$. Da li je G povezan graf? ($\lceil \alpha \rceil$ je najmanji ceo broj veći ili jednak od α; $\lfloor \alpha \rfloor$ je najveći ceo broj manji ili jednak od α).

160. Ako je u grafu sa n čvorova broj grana veći od $(n-1)(n-2)/2$, dokazati da je graf povezan.

161. Neka su $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ stepeni čvorova grafa G. Dokazati da je G povezan graf ako je $d_k \geq k$ za svako $k \leq n - 1 - d_n$.

    Uputstvo. Posmatrati komponentu grafa G koja ne sadrži neki čvor najvećeg stepena.

162. Ako je $\delta(G) \geq 2$, dokazati da G sadrži ciklus.

163. Ako je $\delta(G) \geq 2$, dokazati da G sadrži ciklus dužine bar $\delta(G) + 1$.

164. Ako je $\delta(G) \geq 3$, dokazati da G sadrži ciklus parne dužine.

165. $^{+}$ Dokazati da za svaki graf G postoji $\triangle(G)$-regularan graf H, takav da je G indukovan podgraf u H.

    Uputstvo. Uzeti dovoljan broj kopija grafa G i spojiti granama odgovarajuće čvorove...

166. Neka je X skup od n elemenata ($n \geq 1$). Neka skup svih nepraznih podskupova skupa X predstavlja skup čvorova grafa G, pri čemu su dva čvora iz G spojena granom ako i samo ako je presek odgovarajućih podskupova skupa X prazan. Odrediti broj čvorova i broj grana grafa G.

167. *n-dimenzionalna kocka* Q_n je graf čiji je skup čvorova skup svih uredjenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ gde $a_i \in \{0, 1\}$. Dva čvora su susedna ako i samo ako se odgovarajuće n-torke razlikuju u tačno jednoj koordinati. Dokazati da za n-dimenzionalnu kocku Q_n važe sledeća tvrdjenja:

    (a) Q_n je n-regularan graf;

    (b) $|V(Q_n)| = 2^k$, $|E(Q_n)| = n \cdot 2^{n-1}$;

    (c) Q_n je bipartitan graf;

    (d) Q_n je povezan graf.

168. Neka je G graf čiji je skup čvorova skup svih n-torki sa koordinatama u $\{0, 1\}$, pri čemu su dva čvora susedna ako se razlikuju u dve koordinate. Odrediti broj komponenti grafa G.

169. $^{-}$ Ako bipartitan graf ima n čvorova i e grana, dokazati da je $e \leq \frac{n^2}{4}$.

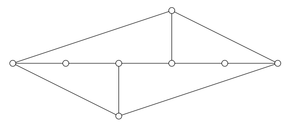
170. $^-$ Odrediti najveći broj grana u bipartitnom podgrafu grafa:

a) P_n, $n \geq 2$.

b) C_n, $n \geq 2$.

c) K_n, $n \geq 2$.

171. U grafu na slici odrediti bipartitni podgraf sa najvećim brojem grana. Dokazati da svaki drugi bipartitni podgraf ima manji broj grana od njega.



172. $^+$ Svaki graf G sadrži bipartitni podgraf sa bar $e(G)/2$ grana.

173. a) Dokazati da za funkciju rastojanja $d(u, v)$ izmedju čvorova grafa G važi nejednakost trougla: $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

b) Dokazati da je dijametar grafa G manji ili jednak dvostrukom radijusu grafa G.

c) Ako su dati prirodni brojevi r i d za koje važi $r \leq d \leq 2r$, dati primer grafa sa radijusom r i dijametrom d.

Uputstvo. Konstruisati odgovarajući graf sa jednim ciklusom ...

174. Neka je G graf sa bar 6 čvorova. Dokazati da bar jedan od grafova G, $\overline{G}$ sadrži trougao.

175. $^-$ Za svaki graf G, bar jedan od grafova G i $\overline{G}$ je povezan.

176. Ako je dijametar grafa G veći od 3, tada je dijametar komplementa $\overline{G}$ manji od 3. Dokazati.

177. Graf izomorfan sa svojim komplementom naziva se *samokomplementaran graf*. Dokazati da je broj čvorova u samokomplementarnom grafu oblika $4k$ ili $4k + 1$.

178. Neka je G samokomplementaran graf sa n čvorova, gde je $n \equiv 1 \pmod 4$. Dokazati da G sadrži čvor stepena $\frac{n-1}{2}$.

179. Neka je G neprazan graf sa bar jednom granom, u kojem svaka dva čvora istog stepena nemaju zajedničkih suseda. Dokazati da G sadrži čvor stepena 1.

180. Pretpostavimo da je G povezan graf koji ne sadrži indukovani podgraf sa četiri čvora izomorfan sa putem ili ciklusom. Dokazati da G sadrži čvor susedan sa svim ostalim čvorovima.

181. U skupu od n, $n \geq 4$, osoba medju svake četiri osobe postoji jedna koja se poznaje sa preostale tri. Dokazati da u tom skupu postoji osoba koja poznaje sve osobe.

182. Na zabavi kod prof. Mozgića učestvuje n bračnih parova. Nijedna osoba se nije rukovala sa svojim bračnim drugom, a pritom se svih $2n-1$ osoba, osim prof. Mozgića, rukovalo sa različitim brojem osoba. Sa koliko osoba se rukovala žena prof. Mozgića?

3.2 Stabla

Stablo i šuma. Povezani graf bez ciklusa naziva se *stablo*. Graf koji ne sadrži cikluse, tj. graf čija je svaka komponenta povezanosti stablo, naziva se *šuma*.

Listovi stabla. Čvor stepena 1 u grafu G naziva se *list*. Ako je G stablo sa bar dva čvora, tada G sadrži bar dva lista.

Ekvivalentne karakterizacije. Sledeći uslovi su ekvivalentni za graf G sa n čvorova:

a) G je povezan graf i ne sadrži cikluse;

b) G je povezan graf i ima $n-1$ granu;

c) G ne sadrži cikluse i ima $n-1$ granu;

d) Za svaki par čvorova $u, v \in V(G)$ postoji tačno jedan put izmedju u i v u G;

e) G ne sadrži cikluse, dok $G+e$ sadrži tačno jedan ciklus za svako $e \in \binom{V}{2} \setminus E(G)$.

Centar stabla. Centar stabla se sastoji od jednog ili dva susedna čvora, a dobija se istovremenim uklanjanjem svih listova stabla i ponavljanjem ovog postupka dok ne ostane najviše dva čvora početnog stabla.

Razapinjući podgraf. *Razapinjući podgraf* grafa $G=(V,E)$ je podgraf oblika (V,E'), $E' \subseteq E$. *Razapinjuće stablo* je razapinjući podgraf koji je stablo, a *razapinjuća šuma* je razapinjući podgraf koji je šuma.

Kejlijeva teorema. Broj razapinjućih stabala kompletnog grafa K_n, $n \in \mathbf{N}$, jednak je n^{n-2}.

Teorema o matricama i stablima. Neka je A matrica susedstva grafa G sa skupom čvorova $V(G)=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Neka je D dijagonalna matrica sa $D_{ii}=d_G(v_i)$ i neka je $L=D-A$ Laplasova matrica grafa G. Za proizvoljne $s,t \in \{1,2,\ldots,n\}$ broj razapinjućih stabala $t(G)$ grafa G jednak je $(-1)^{s+t}$ puta determinanta matrice koja se dobija brisanjem vrste s i kolone t iz matrice L.

Parni skup grana. Neka je $G = (V, E)$ dati graf. Podskup $E' \subseteq E$ zove se *parni skup grana* ako su stepeni svih čvorova podgrafa (V, E') parni. Podskup E' je parni skup grana ako i samo ako postoje medjusobno disjunktni ciklusi $C_1, C_2, \ldots, C_t$ tako da je $E' = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_t$.

Vektorski prostor ciklusa. Neka je $G = (V, E)$ dati graf sa skupom grana $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Svakom podskupu $A \subseteq E$ pridružujemo karakteristični vektor $v_A = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ tako da je

$$v_i = \begin{cases} 1, & e_i \in A \\ 0, & e_i \notin A \end{cases}$$

Neka je $\mathcal{E}$ skup karakterističnih vektora parnih skupova grana grafa G. Skup $\mathcal{E}$ je vektorski prostor nad dvoelementnim poljem GF_2.

Neka je $T = (V, E')$ proizvoljna razapinjuća šuma grafa G. Za svaku granu $e \in E \setminus E'$, neka C_e označava (jedinstveni) ciklus sadržan u grafu $(V, E' \cup \{e\})$. Tada karakteristični vektori ciklusa C_e, $e \in E \setminus E'$, čine bazu vektorskog prostora $\mathcal{E}$, pri čemu za paran skup grana A važi

$$v_A = \sum_{e \in A \setminus E'} v_{C_e}.$$

Ciklusi C_e, $e \in E \setminus E'$ zovu se *fundamentalni* (ili *elementarni*) ciklusi za razapinjuću šumu T. Dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{E}$ se zove *ciklomatički broj grafa* G i jednaka je $|E| - |V| + k$, gde je k broj komponenti povezanosti grafa G.

Zadaci

183. $^-$ Nacrtati sva stabla sa skupom čvorova $\{1, 2, 3, 4\}$, kao i sva neizomorfna stabla sa 6 čvorova.

184. $^-$ Naći dva neizomorfna stabla sa istim nizom stepena čvorova.

185. $^-$ Ako je T stablo za koje važi $\Delta(T) \geq k$, tada T ima bar k listova. Dokazati.

186. Neka je T stablo sa tačno $k - 1$ čvorova koji nisu listovi, sa po jednim čvorom stepena i za svako $2 \leq i \leq k$. Odrediti broj čvorova stabla T.

187. Neka je T stablo u kome svaki čvor koji je susedan sa listom ima stepen bar 3. Dokazati da T ima par listova sa zajedničkim susedom.

188. Dokazati da je niz prirodnih brojeva $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ niz stepena nekog stabla ako i samo ako je $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2$.

189. Neka je T stablo sa n čvorova, $n \geq 2$. Za prirodan broj i, neka p_i označava broj čvorova stepena i u stablu T. Dokazati da je

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

190. Kralj Šongabonga je imao 4 sina, 10 od njegovih muških potomaka su imali po 3 sina svaki, 15 od njegovih muških potomaka su imali po 2 sina svaki, dok su svi ostali umrli bez dece. Ako je poznato da kralj Šongabonga nije imao ženskih potomaka, koliko je ukupno muških potomaka imao ovaj kralj?

191. Dokazati da svako od sledeća dva svojstva karakteriše šume:

    a) svaki indukovani podgraf sadrži čvor stepena manjeg ili jednakog 1.

    b) svaki povezani podgraf je indukovani podgraf.

192. Neka je $n \geq 3$. Dokazati da je graf G sa n čvorova stablo ako i samo ako G nije izomorfan sa kompletnim grafom K_n i dodavanjem bilo koje nove grane izmedju čvorova u G nastaje tačno jedan ciklus.

193. Povezani podgrafovi G_1 i G_2 nekog stabla imaju neke zajedničke grane. Neka je G_3 graf čije su grane zajedničke grane grafova G_1 i G_2, a čvorovi krajevi zajedničkih grana. Dokazati da je G_3 povezan graf.

194. *Podstablo* stabla T je podgraf stabla T koji je stablo. Neka je $\mathcal{T}$ dati skup podstabala stabla T, tako da svaka dva podstabla iz $\mathcal{T}$ imaju neprazan presek. Dokazati da je tada $\cap_{S\in\mathcal{T}} S$ takodje neprazan.

195. Ako je G šuma sa tačno $2k$, $k \geq 1$, čvorova neparnog stepena, tada G sadrži k granski disjunktnih puteva $P_1, P_2, \ldots, P_k$, takvih da je $E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \cdots \cup E(P_k)$.

196. Ako je T stablo sa k grana i G graf za koji važi $\delta(G) \geq k$, tada je T podgraf G.

197. $^+$ Neka je S stablo sa listovima $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, a T stablo sa listovima $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Neka je takodje $d_S(x_i, x_j) = d_T(y_i, y_j)$ za svaki par i, j. Dokazati da su stabla S i T izomorfna.

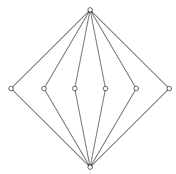
198. Ako su T i T' razapinjuća stabla povezanog grafa G i ako je $e \in E(T) \setminus E(T')$, tada postoji grana $e' \in E(T') \setminus E(T)$, tako da su $T - e + e'$ i $T' - e' + e$ razapinjuća stabla grafa G.

199. Odrediti ciklomatički broj grafa G ako je G: a) K_n, b) $K_{m,n}$, c) povezan regularan graf stepena 3 sa n čvorova.

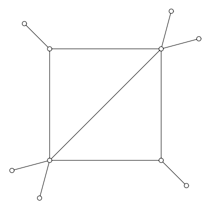
200. Dokazati da je ciklomatički broj grafa jednak zbiru ciklomatičkih brojeva njegovih komponenti povezanosti.

201. Neka je H podgraf grafa G i neka G ima n čvorova, m grana i p komponenti povezanosti. Ako H sadrži granu iz svake konture grafa G, dokazati da je broj grana u grafu H najmanje $m - n + p$.

202. Odrediti broj neizomorfnih, kao i ukupan broj razapinjućih stabala grafa sa slike.

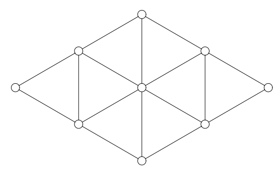


203. Odrediti broj neizomorfnih, kao i ukupan broj razapinjućih stabala grafa sa slike.



204. Dokazati da je broj razapinjućih stabala kompletnog grafa sa n čvorova iz koga je obrisana jedna grana jednak $(n-2)n^{n-3}$.

205. Da li graf na slici može da se predstavi kao unija granski-disjunktnih razapinjućih stabala? A kao unija izomorfnih granski-disjunktnih razapinjućih stabala?



206. Čvorovi grafa G su isključivo stepena 3 ili 4. Koliko ima čvorova stepena 3, ako G može da se razloži na dva razapinjuća stabla?

207. $^+$ Ako graf G ima k granski disjunktnih razapinjućih stabala, tada za svaku particiju $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, broj grana čiji su krajevi u različitim klasama je bar $k(s-1)$. Dokazati.

208. $^+$ Neka su v_1, v_2, $\ldots$, v_n dati čvorovi i d_1, d_2, $\ldots$, d_n dati brojevi tako da je $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$. Dokazati da je broj stabala sa skupom čvorova $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ takvih da čvor v_i ima stepen d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, jednak

$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}.$$

Korišćenjem multinomijalne teoreme dokazati Kejlijevu formulu.

209. Naći broj stabala sa skupom čvorova $\{v_1, \ldots, v_n\}$ u kojima svaki čvor ima stepen 1 ili 3.

3.3 Ojlerovi i Hamiltonovi grafovi

Ojlerovi grafovi. Zatvorena staza koja prolazi kroz sve grane grafa G naziva se *Ojlerova kontura.* Staza, koja nije zatvorena i koja prolazi kroz sve grane grafa G, naziva se *Ojlerov put.* Graf G je *Ojlerov* ako sadrži Ojlerovu konturu.

Karakterizacija Ojlerovih grafova. Graf G je Ojlerov ako i samo ako je povezan i svaki čvor ima paran stepen.

Hamiltonovi grafovi. Ciklus koji prolazi kroz sve čvorove grafa G naziva se *Hamiltonova kontura.* Put koji prolazi kroz sve čvorove grafa G naziva se *Hamiltonov put.* Graf $G = (V, E)$ je *Hamiltonov* ako sadrži Hamiltonovu konturu.

Potrebni uslovi da je graf Hamiltonov. Ako G sadrži Hamiltonovu konturu, tada za svaki podskup $S \subseteq V$ graf $G - S$ ima najviše $|S|$ komponenti.

Dovoljni uslovi da je graf Hamiltonov.

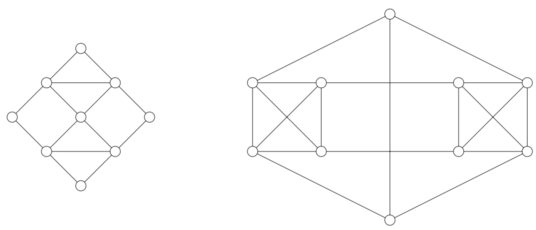
Posina teorema. Neka graf G ima n čvorova, $n \geq 3$, i neka $w(d)$ označava broj čvorova stepena najviše d. Ako za svako d, $1 \leq d < \frac{n-1}{2}$, važi $w(d) \leq d$ i, ako je n neparno, važi i $w(\frac{n-1}{2}) \leq \frac{n-1}{2}$, tada je G Hamiltonov graf.

Oreova teorema. Ako G ima n čvorova, $n \geq 3$, i za svaki par nesusednih čvorova $u, v \in V(G)$ važi $d(u) + d(v) \geq n$, tada je G Hamiltonov graf.

Dirakova teorema. Ako G ima n čvorova, $n \geq 3$, i $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, tada je G Hamiltonov graf.

Zadaci

210. Koji od grafova sa slike su Ojlerovi grafovi?



211. $^-$ Dokazati ili opovrgnuti: Ne postoji povezan Ojlerov graf koji ima paran broj čvorova i neparan broj grana.

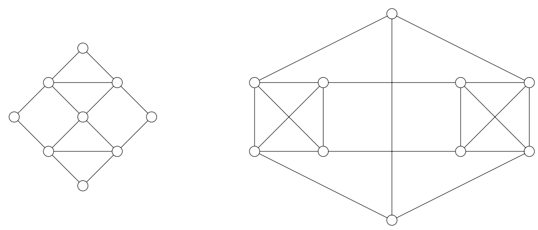
212. $^-$ Dokazati ili opovrgnuti: Ako je G Ojlerov graf sa granama e i f koje imaju zajednički čvor, tada G sadrži Ojlerovu konturu u kojoj se e i f pojavljuju jedna za drugom.

213. Ako je G Ojlerov graf, dati potreban uslov da i njegov komplement $\overline{G}$ bude Ojlerov graf.

214. Povezan graf G je Ojlerov ako i samo ako se njegov skup grana može razbiti na konture, $G = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$, tako da je $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$. Dokazati.

215. Graf G sadrži Ojlerov put ako i samo ako ima tačno nula ili dva čvora neparnog stepena.

216. Koji od grafova sa slike su Hamiltonovi grafovi?



217. $^-$ Dokazati da $K_{n,n}$ ima $n!(n-1)!/2$ Hamiltonovih ciklusa.

218. Dokazati da je, za $n \geq 1$, graf $K_{n,2n,3n}$ Hamiltonov, dok $K_{n,2n,3n+1}$ nije Hamiltonov graf.

219. Dokazati da je n-dimenzionalna kocka Q_n (za definicije videti zadatak 167) Hamiltonov graf za svako $n \geq 2$.

220. Dokazati da Petersenov graf nije Hamiltonov.

221. $^-$ Ako G sadrži Hamiltonov put, tada je za svako $S \subseteq V(G)$ broj komponenti grafa $G - S$ najviše $|S| + 1$.

3.4 Sparivanja u bipartitnim grafovima

Sparivanje čvorova. *Sparivanje* u grafu $G = (V, E)$ je skup medjusobno disjunktnih grana M, $M \subseteq E$. Sparivanje M *sparuje* skup čvorova U, $U \subseteq V$, ako je svaki čvor iz U kraj neke od grana iz M. Čvorovi koji nisu krajevi nijedne grane iz M zovu se *nespareni* čvorovi. Sparivanje M je *savršeno* ako M sparuje skup V.

Naizmenični i uvećavajući putevi. Put P je *naizmeničan* za sparivanje M grafa $G = (V, E)$ ako počinje u nesparenom čvoru i zatim, naizmenično, sadrži grane iz $E \backslash M$ i M. Naizmenični put P je *uvećavajući* za sparivanje M ako se završava u nesparenom čvoru i sadrži neparan broj grana.

Sparivanje u grafu G je maksimalno ako i samo ako u G ne postoji uvećavajući put za sparivanje M.

Kenih-Egervari teorema. *Čvorni pokrivač* grafa G je skup čvorova U, $U \subseteq V(G)$ tako da svaka grana grafa G ima bar jedan kraj u U.

Ako je G bipartitni graf, tada je broj grana u najvećem sparivanju grafa G jednak broju čvorova u najmanjem čvornom pokrivaču grafa G.

Okolina skupa čvorova. Za graf $G = (V, E)$ i skup čvorova $S \subseteq V$, neka je *okolina* $N_G(S)$ data pomoću

$$N_G(S) = \bigcup_{u \in S} N_G(u),$$

gde je $N_G(u)$ okolina čvora u.

Holov uslov. Konačan bipartitan graf G sa particijom čvorova $V(G) = X \cup Y$, ima savršeno sparivanje ako i samo ako važi

$$|N_G(S)| \geq |S| \quad \text{za svako } S \subseteq X.$$

Deficijencija. *Deficijencija* $d(G)$ bipartitnog grafa G je

$$d(G) = \max_{S \subseteq X} |S| - |N_G(S)|.$$

Najveće sparivanje koje sadrži bipartitni graf G ima $|X| - d(G)$ grana.

Transverzale. Neka je $\mathcal{S} = \{S_i : i \in I\}$ familija skupova. Skup T se zove *transverzala* familije $\mathcal{S}$ ako postoji bijekcija $t\colon I \mapsto T$ tako da je $t(i) \in S_i$ za svako $i \in I$.

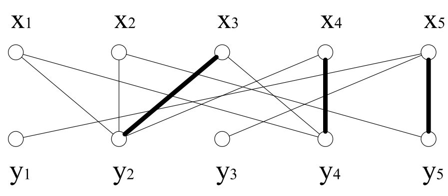
Familiji $\mathcal{S}$ se pridružuje bipartitni graf $G_{\mathcal{S}}$ sa skupom čvorova $\mathcal{S} \cup (\bigcup \mathcal{S})$ i skupom grana

$$\{(t, S) : t \in \bigcup \mathcal{S}, S \in \mathcal{S}, t \in S\}.$$

Tada je skup T transverzala familije $\mathcal{S}$ ako i samo ako postoji bijekcija $t\colon I \mapsto T$ tako da skup uredjenih parova $(t(i), S_i)$, $i \in I$, predstavlja sparivanje grafa $G_{\mathcal{S}}$ koje sparuje čvorove iz $\mathcal{S}$.

Zadaci

222. Dokazati da graf na slici nema savršeno sparivanje.



223. Neka je M sparivanje označeno debljim linijama u grafu na prethodnoj slici.

   a) Naći uvećavajući put za M koji počinje u čvoru x_2.

b) Pomoću nadjenog uvećavajućeg puta konstruisati sparivanje M' sa $|M'| = 4$.

c) Proveriti da li postoji uvećavajući put za M'.

d) Da li je M' najveće sparivanje?

224. Naći 3-regularan graf koji nema savršeno sparivanje.

225. Dokazati da stablo ima najviše jedno savršeno sparivanje.

226. U skupu od $2n$ osoba, $n \geq 2$, svaka osoba poznaje bar jednu od ostalih osoba i medju svake tri osobe postoje dve osobe koje se poznaju. Dokazati da se ovaj skup može razbiti na n parova, tako da svaki par čine poznanici.

227. a) Dokazati da svaki k-regularni bipartitni graf ima savršeno sparivanje.

     b) Neka svaki od nekoliko studenata ima spisak od k knjiga koje želi da pozajmi iz biblioteke. Neka se takodje svaka knjiga nalazi na tačno k spiskova. Dokazati da je moguće organizovati istovremeno pozajmljivanje knjiga tako da svako od studenata pozajmi jednu knjigu sa svog spiska.

228. Neka je G bipartitan Hamiltonov graf i $u, v \in V(G)$. Dokazati da $G-u-v$ sadrži savršeno sparivanje ako i samo ako su u i v u suprotnim klasama biparticije G.

     Primeniti ovo tvrdjenje da se dokaže da 8×8 šahovska tabla iz koje su uklonjena dva jedinična polja može da se pokrije dominama 2×1 ako i samo ako su uklonjena polja bila obojena različitim bojama.

229. Neka je $\mathcal{S}$ familija skupova $\{a, b, l, e\}$, $\{l, e, s, t\}$, $\{s, t, a, b\}$, $\{s, a, l, e\}$, $\{t, a, l, e\}$, $\{s, a, l, t\}$. Naći transverzalu familije $\mathcal{S}$.

230. Dokazati da familija skupova $\{a, m\}$, $\{a, r, e\}$, $\{m, a, r, e\}$, $\{m, a, s, t, e, r\}$, $\{m, e\}$, $\{r, a, m\}$ nema transverzalu.

231. Neka je $S = \{a, d, i, m, o, r, s, t\}$ i neka je $\mathcal{S}$ familija podskupova $\{r, o, a, d\}$, $\{r, i, o, t\}$, $\{r, i, d, s\}$, $\{s, t, a, r\}$, $\{m, o, a, t\}$, $\{d, a, m, s\}$, $\{m, i, s, t\}$. Dokazati da je svaki 7-podskup skupa S transverzala familije $\mathcal{S}$.

232. Dokazati da sledeća beskonačna familija zadovoljava Holov uslov, ali da nema transverzalu:
$$X_0 = \{1, 2, 3, \dots\},$$
$$X_1 = \{1\}, X_2 = \{1, 2\}, \dots, X_i = \{1, 2, \dots, i\}, \dots$$

3.5 Jača povezanost

U ovoj sekciji se bavimo problemima kada povezani graf ostaje povezan i nakon brisanja nekih čvorova ili grana. Takve vrste povezanosti grafa nazivamo jednim imenom *jača povezanost*.

A-B put. Za date skupove čvorova A i B, put $P = x_0, x_1, \ldots, x_k$ se naziva *A-B put* ako je $V(P) \cap A = \{x_0\}$ i $V(P) \cap B = \{x_k\}$.

Nezavisni putevi. Putevi u grafu su nezavisni ako nemaju zajedničkih čvorova, izuzev krajnjih čvorova.

H-put. Za dati graf H, put P se naziva *H-put* ako jedino krajevi puta P pripadaju H.

Rastavljanje čvorova. Ako je $A, B \subseteq V(G)$ i $X \subseteq V(G) \cup E(G)$, tako da svaki A-B put u grafu G sadrži čvor ili granu iz X, tada se kaže da X *rastavlja* skupove A i B u G.

Čvorna povezanost. Graf $G = (V, E)$ je k-povezan, $k \in \mathbf{N}$, ako je $k < |V|$ i za svaki podskup $X \subseteq V$, $|X| < k$ važi da je graf $G - X$ povezan. Najveći prirodan broj k tako da je graf G k-povezan naziva se (*čvorna*) *povezanost* $\kappa(G)$ grafa G.

Granska povezanost. Graf $G = (V, E)$ je l-granski-povezan, $l \in \mathbf{N}$, ako je $l < |E|$ i za svaki podskup $Y \subseteq E$, $|Y| < l$ važi da je graf $G - Y$ povezan. Najveći prirodan broj l tako da je graf G l-granski-povezan naziva se *granska povezanost* $\lambda(G)$ grafa G.

Blok graf. Maksimalni povezani podgraf koji nema presecajuće čvorove naziva se *blok* grafa G.

Neka je A skup svih presecajućih čvorova grafa G i $\mathcal{B}$ skup svih blokova grafa G. *Blok graf* grafa G je graf sa skupom čvorova $A \cup \mathcal{B}$ i skupom grana $\{(a, B) : a \in A, B \in \mathcal{B}, a \in B\}$.

Struktura 2-povezanih grafova. Graf G je 2-povezan ako i samo ako G može da se dobije polazeći od ciklusa uzastopnim dodavanjem H-puteva u već konstruisani grafove H.

Mengerova teorema. Neka je $G = (V, E)$ graf i $A, B \subseteq V$. Tada je najmanji broj čvorova koji rastavljaju A i B u G jednak najvećem broju disjunktnih A-B puteva u G.

Opšta verzija Mengerove teoreme. Graf je k-povezan ako i samo ako sadrži k nezavisnih puteva izmedju svaka dva čvora.

Graf je l-granski-povezan ako i samo ako sadrži l granski-disjunktnih puteva izmedju svaka dva čvora.

Zadaci

233. Neka je G povezan graf i $a, b \in V(G)$. Neka skup čvorova $X \subseteq V(G) \backslash \{a, b\}$ rastavlja čvorove a i b u G. Kaže se da X *minimalno* rastavlja a i b ako nijedan pravi podskup od X ne rastavlja a i b u G.

    a) Dokazati da X minimalno rastavlja a i b ako i samo ako svaki čvor iz X ima suseda u komponenti C_a grafa $G - X$ koja sadrži a i suseda u komponenti C_b grafa $G - X$ koja sadrži b.

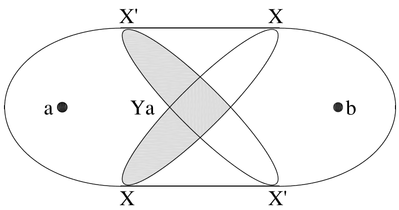
b) Neka je $X' \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ drugi skup koji rastavlja a i b, i neka su C'_a i C'_b definisani na analogan način. Dokazati da tada i skupovi

$$Y_a = (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_a)$$

i

$$Y_b = (X \cap C'_b) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_b)$$

rastavljaju čvorove a i b (videti sliku).



c) Da li Y_a i Y_b minimalno rastavljaju a i b ako X i X' minimalno rastavljaju a i b?

234. Dokazati da je blok graf svakog povezanog grafa stablo.

235. Dokazati da je "grane e i f su jednake ili leže na istom ciklusu" relacija ekvivalencije.

236. Dokazati da su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

a) G je 2-povezan graf;

b) svaka dva čvora grafa G leže na istom ciklusu;

c) svake dve grane grafa G leže na istom ciklusu i G ne sadrži izolovane čvorove.

237. Dokazati Vitnijeve nejednakosti: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ za svaki graf G sa bar tri čvora.

238. Odrediti čvornu i gransku povezanost:

(a) stabla;

(b) kompletnog grafa K_n;

(c) kompletnog bipartitnog grafa $K_{m,n}$;

(d) kompletnog k-partitnog grafa $K_{n_1,\ldots,n_k}$.

239. $^+$ Odrediti čvornu i gransku povezanost n-dimenzionalne kocke Q_n (videti zadatak 167).

240. $^-$ Ako je G l-granski-povezan graf sa n čvorova, dokazati da je $|E(G)| \geq \frac{ln}{2}$.

241. Ako je G graf sa n čvorova, $n \geq 2$, i $\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$, $k \leq n$, dokazati da je G k-povezan graf.

242. $^-$ Postoji li funkcija $f\colon N \mapsto N$ tako da je, za svako $k \in N$, svaki povezani graf sa najmanjim stepenom čvora k bar $f(k)$-povezan?

243. Neka je $k \geq 2$. Dokazati da u k-povezanom grafu svakih k čvorova leži na istom ciklusu.

244. Neka je $k \geq 2$. Dokazati da svaki k-povezani graf sa bar $2k$ čvorova sadrži ciklus dužine bar $2k$.

3.6 Spektar grafa

Spektar grafa. *Sopstvene vrednosti* matrice A su brojevi λ takvi da jednačina $Ax = \lambda x$ ima nenula rešenje za vektor x, u kom slučaju je rešenje x odgovarajući *sopstveni vektor*. *Sopstvene vrednosti* grafa G su sopstvene vrednosti njegove matrice susedstva A. U tom slučaju, A je simetrična matrica i ima realne sopstvene vrednosti i sopstvene vektore i jednačina $Ax = \lambda x$ može da se napiše i u obliku sistema

$$\lambda x_i = \sum_{\{i,j\} \in E(G)} x_j, \quad i \in V(G).$$

Sopstvene vrednosti su koreni *karakterističnog polinoma*

$$\psi(G; \lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod(\lambda - \lambda_i).$$

Spektar grafa G je skup sopstvenih vrednosti zajedno sa njihovim višestrukostima. Sopstvena vrednost je *prosta* ako je njena višestrukost jednaka 1.

Spektri posebnih klasa grafova. Graf bez grana $\overline{K}_n$ ima karakteristični polinom $\psi(\overline{K}_n; \lambda) = \lambda^n$, pa se njegov spektar sastoji od n brojeva svih jednakih 0.

Kompletni graf K_n ima karakteristični polinom $\psi(K_n; \lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{n-1}$ i njegov spektar se sastoji od broja $n-1$ i $n-1$ brojeva jednakih -1.

Kompletan bipartitni graf $K_{m,n}$ ima karakteristični polinom $\psi(K_{m,n}; \lambda) = (\lambda^2 - mn)\lambda^{m+n-2}$ i njegov spektar se sastoji od brojeva $\sqrt{mn}$, $-\sqrt{mn}$ i $m+n-2$ brojeva jednakih 0.

Spektar ciklusa C_n sastoji se od brojeva $2\cos\frac{2\pi i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Spektar puta P_n sastoji se od brojeva $2\cos\frac{\pi i}{n+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Broj šetnji izmedju čvorova. Neka je A matrica susedstva grafa G. Tada je broj šetnji dužine k izmedju čvorova i i j jednak elementu (i, j) matrice A^k.

Broj zatvorenih šetnji u grafu. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti grafa G, tada je broj zatvorenih šetnji dužine k u grafu G jednak $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.

Povezanost. Neka je Λ najveća sopstvena vrednost grafa G. Graf G je povezan ako i samo ako je Λ prosta sopstvena vrednost i postoji sopstveni vektor za Λ čije su sve koordinate pozitivne.

Bipartitnost. Graf G je bipartitan ako i samo ako je za svaku sopstvenu vrednost λ grafa G broj $-\lambda$ takodje sopstvena vrednost grafa G.

Povezan graf G je bipartitan ako i samo ako je za najveću sopstvenu vrednost Λ grafa G broj $-\Lambda$ takodje sopstvena vrednost grafa G.

Najveća sopstvena vrednost podgrafa. Neka je G graf sa najvećom sopstvenom vrednošću Λ_G i H podgraf grafa G sa najvećom sopstvenom vrednošću Λ_H. Tada važi $\Lambda_G \geq \Lambda_H$.

Teorema o preplitanju. Neka je G graf sa n čvorova i sopstvenim vrednostima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, a H indukovani podgraf grafa G sa m čvorova i sopstvenim vrednostima $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m$. Tada za svako $i = 1, 2, \ldots, m$ važi

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}.$$

Rejlijev odnos. Neka graf G ima n čvorova, matricu susedstva A i najveću sopstvenu vrednost Λ. Tada je

$$\begin{aligned}\Lambda &= \sup \{\, x^{\mathrm{T}} A x \ :\ x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1 \,\} \\ &= \sup \{\, 2 \sum_{\{u,v\} \in E(G)} x_u x_v \ :\ x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1 \,\},\end{aligned}$$

pri čemu se supremum dostiže kada je x sopstveni vektor koji odgovara Λ.

Granice za najveću sopstvenu vrednost. Za najveću sopstvenu vrednost Λ grafa G važi $\delta(G) \leq \Lambda \leq \Delta(G)$.

Ako je G regularan graf, tada je $\Lambda = \Delta(G) = \delta(G)$, a Λ ima sopstveni vektor čije su sve koordinate jednake.

Zadaci

245. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti grafa G.

     a) Izraziti broj grana i broj trouglova u grafu G pomoću $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

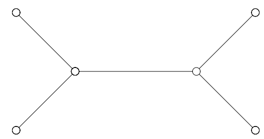
     b) Neka je σ_k broj ciklusa dužine k u G. Neka su $L_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ i $D_k = \sum_{u \in V(G)} d_u^k$ sume k-tih stepena sopstvenih vrednosti i stepena čvorova. Izraziti σ_4 pomoću L_k i D_k.

246. a) Naći povezani graf sa n čvorova za koji svaki od stepena A^1, A^2, ... njegove matrice susedstva sadrži elemente jednake nuli.

     b) Neka je G graf sa n čvorova, A njegova matrica susedstva i I_n jedinična matrica dimenzije n. Dokazati da je G povezan graf ako i samo ako u matrici $(I + A)^{n-1}$ nijedan element nije jednak 0.

247. $^{+}$ Neka je G graf sa skupom čvorova $\{1, 2, \ldots, n\}$ i neka $N_k(i,j)$ označava broj šetnji dužine k u G koje spajaju čvorove i i j. Ako je odgovarajuća funkcija generatrise $w_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} N_k(i,j) t^k$ i $W = (w_{ij})$, tada je $W = (I - tA)^{-1}$.

248. Ako 3-regularan graf G ima sistem disjunktnih podgrafova, od kojih je svaki izomorfan grafu na slici, i koji pokriva sve čvorove, tada je 0 sopstvena vrednost grafa G.



249. a) Ako je poznat spektar regularnog grafa G, odrediti spektar njegovog komplementa $\overline{G}$.

b) Odrediti spektar kompletnog p-partitnog grafa sa m čvorova u svakom delu.

250. a) Nezavisni skup čvorova u grafu G je skup čvorova u kome izmedju svaka dva čvora ne postoji grana. Dokazati da najveći broj čvorova $\alpha(G)$ nezavisnog skupa čvorova grafa G zadovoljava

$$\alpha(G) \leq p_0 + \min\{p_-, p_+\},$$

gde p_-, p_0, p_+ označavaju broj sopstvenih vrednosti grafa G koje su manje, jednake, odnosno veće od 0, redom.

b) Neka p_{-1}^-, p_{-1} i p_{-1}^+ označava broj sopstvenih vrednosti grafa G koje su manje, jednake, odnosno veće od -1, redom. Ako $\omega(G)$ označava najveći broj čvorova u kompletnom podgrafu grafa G, onda je

$$\omega(G) \leq \min\{p_{-1}^- + p_{-1} + 1, p_{-1} + p_{-1}^+, \lambda_1 + 1\}.$$

251. $^-$ Ako je Λ najveća sopstvena vrednost grafa G. dokazati da je $\sqrt{\Delta(G)} \leq \Lambda$.

252. Neka je Λ najveća sopstvena vrednost grafa G sa n čvorova.

a) Neka je $\overline{d} = \frac{\sum_{u \in V(G)} d_u}{n} = \frac{2e}{n}$ srednja vrednost stepena čvorova. Dokazati da je $\overline{d} \leq \Lambda$.

b) Dokazati da jednakost $\overline{d} = \Lambda$ važi ako i samo ako je G regularan graf.

c) Neka su $\lambda_1 = \Lambda$, λ_2, $\ldots$, λ_n sopstvene vrednosti grafa G. Dokazati da je G Λ-regularan graf ako i samo ako je

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \Lambda.$$

253. Ako G ima n čvorova, e grana i najveću sopstvenu vrednost Λ, dokazati da je $\Lambda \leq \sqrt{2e(1 - \frac{1}{n})}$.

Glava 4

Rešenja zadataka

1. Neka je n broj mladića, a m broj devojaka u grupi. Tada je $m + n = 26$. Poznanstvo je simetrična relacija, pa kako svaki mladić poznaje tačno 8 devojaka, a svaka devojka tačno 5 mladića, ukupan broj poznanstava je $8m = 5n$. Rešavanjem dobijenog sistema jednačina, zaključujemo da u grupi ima 16 devojaka i 10 mladića.

2. a) Neka su $A_1, \dots, A_k$ dati podskupovi. Svaki od elemenata iz skupa $\{1, 2, \dots, 8\}$ se nalazi u tačno tri od datih podskupova. To znači da je $\sum_{i=1}^{k} |A_i| = 24$. Kako svaki skup ima tačno 4 elementa, dobijamo da ukupno ima 6 skupova.

   Primer takve familije podskupova je
   $$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\} =$$
   $$\{\{1,2,3,4\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,5,6\}, \{1,4,7,8\}, \{5,6,7,8\}, \{1,6,7,8\}\}.$$

   b) Ako bi $A_1, \dots, A_k$ bili traženi skupovi, važilo bi $\sum_{i=1}^{k} |A_i| = 40$, što nije deljivo sa 3, tj. ne može svaki od skupova da ima tačno 3 elementa.

3. Kako je $60000 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^4$, to je svaki broj oblika $d = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$, gde važi $\alpha_1 \in \{0, \dots, 5\}$, $\alpha_2 \in \{0, 1\}$ i $\alpha_3 \in \{0, \dots, 4\}$, delilac broja 60000. Zato po principu proizvoda dobijamo da je ukupan broj delilaca (uključujući i 1 i 60000) $6 \cdot 2 \cdot 5 = 60$.

4. Neka je $S_i = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Funkcija $f \colon S \mapsto S$ nema fiksnu tačku ako za svako $i = 1, 2, \dots, n$ važi $f(i) \neq i$, tj. ako $f(i) \in S_i$. Kako funkcija f može da se poistoveti sa uredjenom n-torkom $(f(1), f(2), \dots, f(n))$, broj funkcija bez fiksne tačke jednak je broju elemenata u skupu $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, koji je, po principu proizvoda, jednak $(n-1)^n$.

5. a) Neka je A_k, $k \geq 1$, skup svih brojeva u skupu $\{1, 2, \dots, n\}$ koji su deljivi sa p^k, ali nisu deljivi sa p^{k+1}. Tada je, po principu zbira,
   $$\mu_{n,p} = \sum_{k \geq 1} k |A_k|.$$

U skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$ ima $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ brojeva deljivih sa p^k, ali je $\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]$ njih deljivo i sa p^{k+1}, tako da je $|A_k| = \left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]$, pa je zato

$$\mu_{n,p} = \sum_{k\geq 1} k\left(\left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right) = \sum_{k\geq 1} k\left[\frac{n}{p^k}\right] - \sum_{k\geq 2}(k-1)\left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

b) Najveći stepen broja 2 koji deli $n!$ je

$$\begin{aligned}
\mu_{n,2} &= \sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{2^k}\right] = \sum_{k\geq 1}\left[2^{e_1-k} + 2^{e_2-k} + \cdots + 2^{e_r-k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{e_r} 2^{e_1-k} + 2^{e_2-k} + \cdots + 2^{e_{r-1}-k} + 2^{e_r-k} + \\
&\quad \sum_{k=e_r+1}^{e_{r-1}} 2^{e_1-k} + 2^{e_2-k} + \cdots + 2^{e_{r-1}-k} + \\
&\quad \ldots + \\
&\quad \sum_{k=e_{j-1}+1}^{e_j} 2^{e_1-k} + 2^{e_2-k} + \cdots + 2^{e_j-k} + \\
&\quad \ldots + \\
&\quad \sum_{k=e_2+1}^{e_1} 2^{e_1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{e_1} 2^{e_1-k} + \sum_{k=1}^{e_2} 2^{e_2-k} + \ldots + \sum_{k=1}^{e_j} 2^{e_j-k} + \ldots + \sum_{k=1}^{e_r} 2^{e_r-k} \\
&= (2^{e_1}-1) + (2^{e_2}-1) + \ldots + (2^{e_j}-1) + \ldots + (2^{e_r}-1) \\
&= n - r.
\end{aligned}$$

6. Postoje dve vrste čarapa, pa je dovoljno da čovek uzme tri čarape da bude siguran da je uzeo par iste boje.

   Da bi bio siguran da ima par sive boje, mora da uzme $10 + 2 = 12$ čarapa, jer se može desiti da je prvih deset čarapa crne boje!

7. Mogući broj poznanstava za svakog čoveka u grupi je broj iz skupa $\{0, \ldots, n-1\}$. Ako postoji čovek sa 0 poznanstava, onda ne može da postoji čovek sa $n-1$ poznanstava, i obrnuto. Znači, medju n osoba imamo najviše $n-1$ različitih brojeva poznanstava, pa na osnovu Dirihleovog principa postoje dva čoveka sa istim brojem poznanstava.

8. Ako su date dve celobrojne tačke (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2), onda središte duži koja ih spaja ima koordinate $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$. Da bi to središte

bilo celobrojna tačka, parovi koordinata x_1 i x_2, y_1 i y_2, z_1 i z_2 moraju biti iste parnosti.

Svakoj tački (x, y, z) pridružimo trojku (x', y', z'), gde su x', y' i z' ostaci pri deljenju sa 2 brojeva x, y i z, redom. Postoji ukupno osam mogućih trojki (x', y', z'), jer $x', y', z' \in \{0, 1\}$, a kako je dato devet tačaka, to po Dirihleovom principu postoje dve tačke kojima je pridružena ista trojka ostataka. Odgovarajuće koordinate za te dve tačke su iste parnosti, pa je središte duži koja ih spaja celobrojna tačka.

9. Prirodan broj pri deljenju sa n može da daje ostatke $0, 1, \ldots, n-1$, pa postoji ukupno n mogućih ostataka. To znači da medju datih $n+1$ brojeva postoje dva koji pri deljenju sa n daju isti ostatak, pa je njihova razlika tada deljiva sa n.

10. Posmatrajmo $n+1$ brojeva oblika $1, 11, 111, 1111, \ldots, 11\ldots1$, gde i-ti broj sadrži i jedinica, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Medju njima postoje dva koji daju isti ostatak pri deljenju sa n. Njihova razlika je deljiva sa n i ima oblik $11\ldots100\ldots0$.

11. Posmatrajmo brojeve $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^{10^4+1}$. Medju njima postoje dva koji daju isti ostatak pri deljenju sa 10^4, pa postoje $k, m \in \mathbf{N}$ tako da je $k > m$ i $10^4 | 3^k - 3^m = 3^m(3^{k-m} - 1)$. Kako su 10^4 i 3^m uzajamno prosti brojevi, to znači da $10^4 | 3^{k-m} - 1$, odakle zaključujemo da se broj 3^{k-m} završava ciframa 0001.

12. Kako su dati brojevi medjusobno različiti, možemo da pretpostavimo da je $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} < 2n$.

    Posmatrajmo dve grupe brojeva :

$$a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$$

    i

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1.$$

    Svaka od ovih grupa sadrži po n različitih prirodnih brojeva. Kako u obe grupe zajedno ima $2n$ brojeva manjih od $2n$, to medju njima postoje dva jednaka broja. Oni moraju pripadati različitim grupama (jer su brojevi u grupama medjusobno različiti), pa postoje različiti $i, j \in \mathbf{N}$ za koje je $a_i = a_j - a_1$. Odatle je $a_j = a_i + a_1$.

13. Svaka dva uzastopna prirodna broja su uzajamno prosta. Podelimo brojeve iz $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ na n grupa, tako što u grupu i, $i = 1, 2, \ldots, n$, smestimo brojeve $2i - 1$ i $2i$. Po Dirihleovom principu, medju $n + 1$ brojeva postoje dva koji pripadaju istoj od ovih n grupa, pa su ta dva broja uzajamno prosta.

14. a) Neka je f funkcija definisana u uputstvu. Kako skup X ima $n + 1$, a skup Y ima n elemenata, to postoje različiti brojevi $p, q \in X$ tako da je

$$r = f(p) = f(q).$$

Po definiciji funkcije f, brojevi p i q mogu da se napišu u obliku

$$p = 2^k \cdot r, \quad q = 2^l \cdot r, \quad \text{za neko } k, l \geq 0.$$

Ako je $p < q$, tada je i $k < l$, pa broj p deli broj q; u suprotnom, q deli p.

b) U skupu $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ ni jedan od elemenata ne deli neki drugi element.

15. Posmatrajmo brojeve $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ako je neki od brojeva s_1, s_2, $\ldots$, s_n deljiv sa n, onda je traženi podskup pronadjen. U suprotnom, brojevi s_1, s_2, $\ldots$, s_n daju ostatke od 1 do $n-1$ pri deljenju sa n, pa po Dirihleovom principu postoje dva broja s_k i s_l, $k < l$, koji daju isti ostatak pri deljenju sa n. Tada je $s_l - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ deljivo sa n.

16. Neka je a_k broj partija koje je igrač odigrao u toku prvih k dana, $k = 1, 2, \ldots, d$. Posmatrajmo grupe brojeva

$$a_1, a_2, \ldots, a_d$$

i

$$a_1 + r, a_2 + r, \ldots, a_d + r.$$

Brojevi u svakoj od ovih grupa su medjusobno različiti, jer je igrač igrao bar jednu partiju dnevno, i važi $a_d \leq m$, tj. $a_d + r \leq m + r \leq 2d - 1$. Prema tome, $2d$ brojeva u ove dve grupe mogu imati vrednosti od 1 do $2d - 1$, pa medju njima postoje dva ista. Oni ne mogu pripadati istim grupama, pa stoga postoje $i, j \in \mathbf{N}$ takvi da je $a_i = a_j + r$. To znači da je igrač od dana $j + 1$ do dana i odigrao tačno r partija.

17. a) Neka je $i < j$. Ako je $x_i < x_j$, onda je x_i manji od svih brojeva koji čine najduži rastući podniz koji počinje sa brojem x_j, pa je tada $m_i > m_j$. Slično, ako je $x_i > x_j$, onda je x_i veći od svih brojeva koji čine najduži opadajući podniz koji počinje sa brojem x_j, pa je tada $n_i > n_j$. Zato važi $i \neq j \Rightarrow (m_i, n_i) \neq (m_j, n_j)$, pa je funkcija f injektivna.

    b) Pretpostavimo suprotno, tj. da najduži rastući podnizovi imaju najviše m, a najduži opadajući podnizovi najviše n brojeva. Tada postoji najviše mn mogućih parova za vrednosti funkcije $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(mn+1)$, pa pošto onda bar dve vrednosti moraju da budu iste, funkcija f ne može da bude injektivna, što je kontradikcija sa delom pod a).

18. a) Za svakog od n prijatelja odredjujemo jednu od k razglednica koju će dobiti taj prijatelj. Prema tome, u pitanju su uredjeni izbori sa ponavljanjem n elemenata (prijatelja) iz skupa od k elemenata (razglednica). Ukupan broj načina je k^n.

    b) Sada su u pitanju su uredjeni izbori bez ponavljanja n elemenata (prijatelja) iz skupa od k elemenata (razglednica). Ukupan broj načina je $k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)$.

c) U ovom slučaju, za svaku od k razglednica odredjujemo jednog od n prijatelja koji će dobiti tu razglednicu. Prema tome, u pitanju su uredjeni izbori sa ponavljanjem k elemenata (razglednica) iz skupa od n elemenata (prijatelja). Ukupan broj načina je n^k.

19. Kako broj ne može da počinje nulom, to je ukupan broj šestocifrenih brojeva $9 \cdot 10^5$ (za prvu cifru ima 9 mogućnosti, a za sve ostale po 10). Brojeva čije su sve cifre različite ima $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (uredjeni izbori bez ponavljanja, s tim što prva cifra ne može da bude 0). Odatle dobijamo da traženih brojeva ima $9 \cdot 10^5 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 763920$.

20. Za potrebe ovog zadatka, pretpostavićemo da decimalni zapis svakog broja od 1 do 9999999 ima sedam cifara: ako ima manje od sedam cifara, ispred prve cifre se dodaje potreban broj nula (npr. umesto 1 pišemo 0000001).

    Sada decimalni zapis brojeva koji ne sadrže cifru 5 predstavlja uredjeni izbor 7 cifara iz skupa od 9 elemenata $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Prema tome, takvih brojeva ima ukupno $9^7 = 4782969$, dok brojeva koji sadrže cifru 5 ima više: $9999999 - 9^7 = 5217030$.

21. Za date skupove A i B, konstruisaćemo preslikavanje $f_{A,B}\colon \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{0, 1, 2\}$ na sledeći način:

$$f_{A,B}(i) = \begin{cases} 0, & i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B \\ 1, & i \in B \setminus A \\ 2, & i \in A \end{cases}$$

    Par skupova A, B, tako da je $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, obostrano jednoznačno je odredjen preslikavanjem $f_{A,B}$. Prema tome, broj ovakvih parova skupova je jednak broju svih preslikavanja $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{0, 1, 2\}$, tj. 3^n.

22. Neka je $X_{n,n} = \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$. Binarna relacija ρ na skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$ je svaki podskup skupa X, pa je ukupan broj binarnih relacija jednak 2^{n^2}.

    a) Relacija ρ je refleksivna ako sadrži skup $\{(1, 1), (2, 2), \ldots, (n, n)\}$. Od preostalih $n^2 - n$ uredjenih parova iz skupa $X_{n,n}$ može se izabrati proizvoljan podskup, pa je ukupan broj refleksivnih relacija jednak 2^{n^2-n}.

    b) Relacija ρ je simetrična ako za svaki uredjeni par (x, y) sadrži i uredjeni par (y, x). Zato je simetrična relacija ρ u potpunosti odredjena ako znamo koji uredjeni parovi (x, y), kod kojih je $x \leq y$, pripadaju ρ. Takvih parova ima $\frac{n(n+1)}{2}$, pa je ukupan broj simetričnih relacija jednak $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

    c) Refleksivna i simetrična relacija ρ sadrži skup $\{(1, 1), (2, 2), \ldots, (n, n)\}$, a u potpunosti je odredjena ako znamo koji uredjeni parovi (x, y), kod kojih je $x < y$, pripadaju ρ. Ovakvih parova ima $\frac{n(n-1)}{2}$, pa je zato ukupan broj refleksivnih i simetričnih relacija jednak $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

23. a) q^{n^2}

b) Determinanta matrice je različita od 0 ako i samo ako su njene kolone linearno nezavisni vektori. Označimo kolone matrice sa c_1, c_2, ..., c_n.

Kolona c_1 može da se izabere kao proizvoljan vektor različit od nula-vektora, što se može uraditi na $q^n - 1$ načina.

Kolona c_2 ne sme biti linearno zavisna sa prvom kolonom, što isključuje q mogućih vektora za kolonu c_2, odnosno sve vektore oblika $a_1 \cdot c_1$, $a_1 = 0, 1, \dots, q-1$.

Slično, ako pretpostavimo da su kolone c_1, c_2, ..., c_{j-1} već izabrane, tada kolona c_j ne sme biti linearno zavisna sa prethodnim kolonama, što isključuje q^{j-1} mogućih vektora za kolonu c_j, odnosno sve linearne kombinacije $a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + \dots + a_{j-1} \cdot c_{j-1}$.

Na taj način, principom proizvoda dobijamo da je ukupan broj traženih matrica jednak

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdot \ldots \cdot (q^n - q^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

24. Ovde se radi o uredjenom izboru bez ponavljanja 3 elementa (predsednika, sekretara i blagajnika) iz skupa od 9 elemenata (svih članova komiteta), pa je broj različitih izbora $9 \cdot 8 \cdot 7$.

25. a) U pitanju je broj uredjenih izbora bez ponavljanja $m+n$ elemenata iz skupa od $m+n$ elemenata, tj. $(m+n) \cdot (m+n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = (m+n)!$.

b) Ako sve devojčice posmatramo kao jednu grupu, onda je ukupan broj rasporeda n dečaka i jedne grupe devojčica jednak $(n+1)!$. Kako se devojčice unutar grupe mogu da rasporede na proizvoljan način, za svaki od rasporeda dečaka i grupe dobijamo po $m!$ rasporeda devojčica unutar grupe. Znači, ukupan broj rasporeda dečaka i devojčica je $(n+1)! \cdot m!$.

26. Jedno crno polje možemo da izaberemo na 32 načina. Njegovim izborom onemogućuje se izbor belih polja iz njegove vrste i njegove kolone. Takvih belih polja ima ukupno 8, pa belo polje možemo da izaberemo na 24 načina. Znači, ukupan broj mogućih izbora je $32 \cdot 24$.

27. Neka je $M = (a_{i,j})_{m \times n}$ matrica sa elementima $+1$ i -1.

a) Neka su elementi $a_{i,j}$, za $i \leq m-1$ i $j \leq n-1$, izabrani proizvoljno. Da bi proizvodi elemenata u i-toj vrsti, $i \leq m-1$, i j-toj koloni, $j \leq n-1$, bili jednaki 1, mora da važi

$$a_{i,n} = 1/(a_{i,1} \cdot a_{i,2} \cdot \ldots \cdot a_{i,n-1}) = a_{i,1} \cdot a_{i,2} \cdot \ldots \cdot a_{i,n-1}$$

i

$$a_{m,j} = 1/(a_{1,j} \cdot a_{2,j} \cdot \ldots \cdot a_{m-1,j}) = a_{1,j} \cdot a_{2,j} \cdot \ldots \cdot a_{m-1,j}.$$

Da bi proizvod elemenata u m-toj vrsti i n-toj koloni bio takodje jednak 1, mora da važi

$$a_{m,n} = a_{m,1} \cdot a_{m,2} \cdot \ldots \cdot a_{m,n-1} = \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} a_{i,j}.$$

S obzirom da su elementi $a_{i,j}$, za $i \leq m-1$ i $j \leq n-1$, izabrani proizvoljno, ukupan broj matrica M u ovom slučaju jednak je $2^{(m-1)(n-1)}$.

b) Kao i u prethodnom slučaju, neka su elementi $a_{i,j}$, za $i \leq m-1$ i $j \leq n-1$, izabrani proizvoljno. Da bi proizvodi elemenata u i-toj vrsti, $i \leq m-1$, i j-toj koloni, $j \leq n-1$, bili jednaki -1, mora da važi

$$a_{i,n} = -1/(a_{i,1} \cdot a_{i,2} \cdot \ldots \cdot a_{i,n-1}) = -a_{i,1} \cdot a_{i,2} \cdot \ldots \cdot a_{i,n-1}$$

i

$$a_{m,j} = -1/(a_{1,j} \cdot a_{2,j} \cdot \ldots \cdot a_{m-1,j}) = -a_{1,j} \cdot a_{2,j} \cdot \ldots \cdot a_{m-1,j}.$$

Medjutim, da bi proizvod elemenata u m-toj vrsti i n-toj koloni bio takodje jednak -1, sada mora da važi

$$a_{m,n} = (-a_{m,1}) \cdot (-a_{m,2}) \cdot \ldots \cdot (-a_{m,n-1}) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} a_{i,j}$$

i

$$a_{m,n} = (-a_{1,n}) \cdot (-a_{2,n}) \cdot \ldots \cdot (-a_{m-1,n}) = (-1)^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} a_{i,j}.$$

Zato, ako su brojevi m i n iste parnosti, ukupan broj matrica M, kao i u delu pod a), jednak je $2^{(m-1)(n-1)}$. Medjutim, ako su brojevi m i n različite parnosti, element $a_{m,n}$ ne može da bude izabran (jer je u jednoj od gornjih jednakosti jednak $+1$, a u drugoj -1), pa je ukupan broj matrica M u tom slučaju jednak 0.

28. Ako se topovi medjusobno ne napadaju, onda u svakoj vrsti i svakoj koloni mora da se nalazi tačno po jedan top. Neka se top i nalazi u i-toj vrsti, $i = 1, 2, \ldots, 8$, i neka $\alpha(i)$ predstavlja broj kolone u kojoj se nalazi top i. Topovi se medjusobno ne napadaju ako važi $i \neq j \Rightarrow \alpha(i) \neq \alpha(j)$, tj. ako je α permutacija, pa je ukupan broj rasporeda topova jednak 8!.

29. Brojeve 1 i 2 možemo da posmatramo kao jedan uredjeni par, pa je broj permutacija preostalih $n-2$ brojeva i ovog uredjenog para jednak $(n-1)!$. Kako brojevi 1 i 2 mogu da formiraju dva uredjena para: $(1, 2)$ i $(2, 1)$, ukupan broj traženih permutacija je $2(n-1)!$.

30. Zamenom mesta brojeva 1 i 2 vidi se da permutacija u kojima broj 2 stoji iza broja 1 ima podjednako kao i permutacija u kojima broj 2 stoji ispred broja 1. S obzirom da svaka permutacija pripada jednoj od ove dve grupe, zaključujemo da je broj permutacija u svakoj od njih $n!/2$.

31. Permutacija u kojima je 1 na mestu i, za neko fiksirano i, a 2 na mestu $i+k+1$ ima $(n-2)!$ (jer su mesta za 1 i 2 fiksirana). Pri tome važi $1 \le i \le n-k-1$, pa je broj svih permutacija u kojima se 2 nalazi k mesta iza 1 jednak $(n-k-1)(n-2)!$. Slično, broj permutacija u kojima se 2 nalazi k mesta ispred 1 takodje je jednak $(n-k-1)(n-2)!$, pa je ukupan broj permutacija u kojima se izmedju 1 i 2 nalazi k drugih brojeva jednak $2(n-k-1)(n-2)!$.

32. Pošto se kružnica može proizvoljno rotirati, permutacije

$$p_1 \dots p_{i-1} p_i p_{i+1} \dots p_n$$

i

$$p_i p_{i+1} \dots p_n p_1 \dots p_{i-1}$$

se ne razlikuju medju sobom kada se objekti rasporede na kružnici. Zato za svaku permutaciju n objekata na kružnici postoji jos $n-1$ "kružno jednakih" permutacija, tako da je ukupan broj "kružno različitih" permutacija jednak $n!/n = (n-1)!$.

33. Ako predsednika i dva potpredsednika posmatramo kao jedan objekat, onda iz zadatka 32 vidimo da je ukupan broj rasporeda preostalih $n-3$ članova upravnog odbora i "predsedničke" grupe jednak $(n-3)!$. Pošto za "predsedničku" grupu postoje dva moguća rasporeda, u zavisnosti od toga koji potpredsednik sedi s koje strane predsednika, ukupan broj rasporeda članova upravnog odbora na traženi način jednak je $2(n-3)!$.

34. Da bi bili ispunjeni uslovi zadatka, devojke i mladići treba da sede naizmenično. Traženi broj načina je, po principu proizvoda, jednak proizvodu broja rasporeda devojaka za okruglim stolom i broja rasporeda mladića, tj. $(n-1)!^2$.

35. Ciklusi date permutacije su (1 3 7), (2 5 4 8), (6), (9), pa pošto se ciklusi dužine 1 ne navode, ciklusni zapis date permutacije je (1 3 7)(2 5 4 8).

36. Označimo datu permutaciju sa p. Ciklusi permutacije p su (1 2 3), (4 5) i (6 7 8 9), pa važi

$$\begin{aligned} p^3(x) &= x, \quad x \in X = \{1,2,3\}, \\ p^2(y) &= y, \quad y \in Y = \{4,5\}, \\ p^4(z) &= z, \quad z \in Z = \{6,7,8,9\}. \end{aligned}$$

Stepen k za koji je $p^k = id$ mora da bude deljiv sa 3, zbog elemenata iz X, 2, zbog elemenata iz Y, i 4, zbog elemenata iz Z. Najmanji takav broj je $NZS(3,2,4) = 12$, što je ujedno i red permutacije p.

37. Označimo karte u špilu redom brojevima $1, 2, \dots, 32$. Permutacija koja odgovara mešanju karata opisanom u zadatku je sledeća (zapisana u dva

reda zbog dužine):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \ldots \\ 1 & 17 & 2 & 18 & 3 & 19 & 4 & 20 & 5 & 21 & 6 & 22 & 7 & 23 & 8 & 24 & \ldots \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \ldots & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ \ldots & 9 & 25 & 10 & 26 & 11 & 27 & 12 & 28 & 13 & 29 & 14 & 30 & 15 & 31 & 16 & 32 \end{pmatrix}.$$

Ciklusni zapis ove permutacije je:

$$(2\ 17\ 9\ 5\ 3)(4\ 18\ 25\ 13\ 7)(6\ 19\ 10\ 21\ 11)$$

$$(8\ 20\ 26\ 29\ 15)(12\ 22\ 27\ 14\ 23)(16\ 24\ 28\ 30\ 31).$$

Kao što vidimo, svaki ciklus ima dužinu 5, tako da je i red permutacije jednak 5, pa će se zato špil karata vratiti u početni raspored nakon 5 mešanja.

38. Neka je $p = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$ permutacija koja ima samo jedan ciklus. Kao i kod okruglih stolova (zadaci 32, 33, 34), ovaj ciklus je jednak ciklusu

$$(a_i\ a_{i+1}\ \ldots\ a_n\ a_1\ \ldots\ a_{i-1}), \quad i = 2, \ldots, n,$$

tako da postoji n različitih zapisa istog ciklusa. Stoga je ukupan broj različitih ciklusa dužine n jednak $n!/n = (n-1)!$.

39. Razmotrimo odnos susednih binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} \Big/ \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Big/ \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n-k+1}{k}.$$

Stoga je

$$\binom{n}{k-1} \leq \binom{n}{k} \ \Leftrightarrow\ k \leq n-k+1 \ \Leftrightarrow\ k \leq \frac{n+1}{2},$$

a odatle sledi tvrdjenje zadatka.

Napomena: Svojstvo konačnog niza da njegovi elementi najpre rastu, a zatim opadaju naziva se *unimodalnost*.

40. Top mora da napravi po 7 horizontalnih i vertikalnih pokreta na bilo kom najkraćem putu. Ako horizontalni pokret označimo nulom, a vertikalni jedinicom, onda je očigledno da najkraćih puteva ima koliko i nizova od 7 nula i 7 jedinica rasporedjenih u proizvoljnom redosledu. Ukupan broj takvih nizova je $\binom{14}{7}$.

41. *I način:* n_1 kuglica koje idu u prvu kutiju možemo odabrati od n različitih kuglica na $\binom{n}{n_1}$ načina. Od preostalih $n - n_1$ kuglica možemo odabrati n_2 kuglica za drugu kutiju na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina. Zatim, od preostalih $n - n_1 - n_2$ kuglica možemo odabrati n_3 kuglica na $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ načina, itd.

Na kraju ostaje n_m kuglica od kojih treba odabrati n_m kuglica koje idu u m-tu kutiju i to možemo uraditi na $\binom{n_m}{n_m} = 1$ način. Traženi rezultat dobijamo po principu proizvoda:

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \ldots \cdot \binom{n_m}{n_m}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \ldots \cdot \frac{n_m!}{n_m!0!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_m!}.$$

II način: Problemu ćemo pristupiti sa druge strane: za svaku od n kuglica ćemo zapisati u koju od m kutija ide. Tako smo dobili niz od n brojeva iz skupa $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$, pri čemu n_1 tih brojeva je jednako 1, n_2 je 2, …, n_m je m. A to su permutacije sa ponavljanjem i njihov broj je $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_m!}$.

42. Od 6 različitih osoba moguće je odabrati 3 na $\binom{6}{3} = 20$ načina. Od tih 20 "trojki" možemo odabrati 5 na $\binom{20}{5} = 15\,504$ načina. Kako je bitno koja trojka čini koju komisiju, taj rezultat moramo pomnožiti sa brojem premeštanja (permutovanja) tih 5 trojki, tj. sa $5! = 120$. Stoga je konačan rezultat $\binom{\binom{6}{3}}{5} \cdot 5! = 1\,860\,480$.

43. Četiri asa možemo staviti na neko od prvih 10 mesta na $V_{10}^4 = \binom{10}{4} \cdot 4!$ načina. Kad smo rasporedili asove svaku od preostalih 48 karata možemo staviti na na bilo koje od preostalih 48 mesta, tj. na $48!$ načina. Po principu proizvoda dobijamo rezultat: $\binom{10}{4} \cdot 4! \cdot 48!$.

44. Neka je čovek pozvao k svojih muških rodjaka - to može učiniti na $\binom{5}{k}$ načina. Tada on mora da pozove $6-k$ ženskih rodjaka: $\binom{7}{6-k}$ načina. Njegova žena mora da pozove njenih k ženskih rodjaka – $\binom{5}{k}$ načina i njenih $6-k$ muških rodjaka – $\binom{7}{6-k}$ načina. Po prinicipu proizvoda dobijamo da se sve to pozivanje može izvesti na $\binom{5}{k}^2 \binom{7}{6-k}^2$ načina. Kako k može biti 0,1,…,5 po principu zbira dobijamo da je rezultat: $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}^2 \binom{7}{6-k}^2 = 267\,148$.

45. Posmatraćemo slučajeve u zavisnosti od toga kog smo igrača birali za krilo. Ukoliko odaberemo onog koji je samo krilo od preostalih 5 bekova 2 možemo izabrati na $\binom{5}{2}$, a od preostalih 4 centra 2 možemo izabrati na $\binom{4}{2}$, što po principu proizvoda daje $\binom{5}{2}\binom{4}{2} = 60$ načina. Ukoliko odaberemo za krilo igrača koji može da igra i krilo i centra, onda ostale možemo odabrati na $\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$ načina. Ukoliko odaberemo za krilo jednog od dva igrača koji mogu igrati i krilo i beka, tada ostale možemo odabrati na $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36$

načina. Problem je što ovde dva puta brojimo iste ekipe (one kod kojih je jedan od igrača koji mogu igrati i beka i krilo bek, a drugi krilo!): sa ta dva fiksirana igrača ostala tri možemo odabrati na $\binom{3}{1}\binom{4}{2} = 18$ načina. Stoga u ovom slučaju ekipu možemo odabrati na $2\binom{4}{2}\binom{4}{2} - \binom{3}{1}\binom{4}{2} = 54$ načina. Ukupan broj ekipa dobijamo pomoću principa zbira: $\binom{5}{2}\binom{4}{2} + \binom{5}{2}\binom{3}{2} + 2\binom{4}{2}\binom{4}{2} - \binom{3}{1}\binom{4}{2} = 144$.

46. *I način:* Proizvoljna permutacija visina $2n$ vojnika, π, odgovara nekom rasporedu tih vojnika u dve vrste (π_{n+i} se nalazi u i-toj koloni iza π_i). Svaki od tih rasporeda može se dovesti do pravilnog ukoliko svi vojnici koji su istoj koloni, a prvi je viši od drugog, medjusobno zamene mesta. Svaki od tih pravilnih rasporeda dobija se od 2^n različitih rasporeda (u svakoj od n kolona dva fiksirana vojnika se mogu rasporediti na $2! = 2$ načina), te je traženi rezultat: $\dfrac{(2n)!}{2^n} = n! \cdot (2n-1)!!$ (gde je $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ prozvod svih neparnih brojeva $\leq 2n-1$).

    II način: Označimo sa a_n broj pravilnih rasporeda tih $2n$ vojnika. Uočimo najnižeg vojnika. On može biti u bilo kojoj od $\binom{n}{1} = n$ kolona, ali mora biti u prvoj vrsti. Iza njega može biti bilo koji od preostalih $2n-1$ vojnika. Ostalih $2(n-1)$ vojnika se može rasporediti na a_{n-1} načina. Odatle imamo rekurentnu formulu $a_n = n \cdot (2n-1) \cdot a_{n-1}$. Početni uslov je $a_1 = 1$ (dva vojnika se mogu rasporediti samo na jedan način tako da je niži ispred). Uz pomoć principa matematičke indukcije dobijamo da je $a_n = n! \cdot (2n-1)!!$.

47. Ako smo odabrali k od n jednakih predmeta, tada preostalih $n-k$ predmeta koje biramo od $2n+1$ različitih predmeta možemo izabrati na $\binom{2n+1}{n-k}$. Korišćenjem principa zbira i osobine binomnih koeficijenata $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ dobijamo rezultat: $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n-k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$.

48. Označimo sa x broj komisija koje zadovoljavaju tvrdjenje zadatka (zvaćemo ih "dobre komisije"), a sa y broj ostalih tročlanih komisija ("loše komisije"). Tada važi $x + y = \binom{30}{3} = 4060$. Neka svaki poslanik napravi spisak svih tročlanih komisija u kojima je on član, a druga dva poslanika su ili oba u svadji sa njim ili nijedan nije u svadji sa njim. Na tom spisku će se svaka dobra komisija pojavljivati 3 puta (svaki poslanik će je zapisati), a svaka loša komisija će se javljati samo jednom. Sa druge strane na tom spisku ima $\binom{20}{2}$ komisija koje sadrže jednog fiksiranog poslanika i nema poslanika koji su u svadji i $\binom{10}{2}$ komisija koje sadrže jednog fiksiranog poslanika i svi poslanici su u svadji. Stoga imamo i drugu jednačinu $3x + y = (\binom{20}{2} + \binom{10}{2}) \cdot 30 = 7050$. Rešavanjem ovog sistema dobijamo rezultat: $x = 1495$.

49. U ovom zadatku imamo višestruko pojavljivanje neuredjenih izbora sa ponavljanjem: skup X nam predstavljaju prijatelji ($|X| = n$) i za i-tu razglednicu imamo
$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = a_i,$$

gde je $s_j \geq 0$ broj razglednica i-te vrste, koje je dobija prijatelj j. Broj takvih podela i-te razlgednice jednak $\binom{n+a_i-1}{a_i-1} = \binom{n+a_i-1}{n}$. Po principu proizvoda dobijamo traženi rezultat: $\prod_{i=1}^{k} \binom{n+a_i-1}{n}$.

50. U proizvodu $(x+y+z)^n$ imamo članova $x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3}$ koliko i rešenja jednačine $n_1+n_2+n_3=n$, $n_i \geq 0$, što su neuredjeni izbori sa ponavljanjem: $\binom{n+2}{2}$.

51. Za plave kuglice imamo: $p_1+p_2+\ldots+p_m=n_1$, $p_i \geq 0$, što su neuredjeni izbori sa ponavljanjem, pa se plave kuglice mogu rasporediti na $\binom{n_1+m-1}{m-1}$ načina. Analogno dobijamo za žute $\check{z}_1+\check{z}_2+\cdots+\check{z}_m=n_2$, $\check{z}_i \geq 0$, tj. $\binom{n_2+m-1}{m-1}$ načina i za crvene $c_1+c_2+\cdots+c_m=n_3$, $c_i \geq 0$, tj. $\binom{n_3+m-1}{m-1}$ načina. Po principu proizvoda dobijamo da je traženi rezultat:
$$\binom{n_1+m-1}{m-1} \cdot \binom{n_2+m-1}{m-1} \cdot \binom{n_3+m-1}{m-1}.$$

52. Kako se predmeti moraju podeliti tako da svaki učenik dobije bar po jedan predmet od svake vrste, to možemo na pocetku svakom učeniku podeliti po jednu svesku, olovku i knjigu. Preostalih 5 svezaka, 6 olovaka i 7 knjiga možemo podeliti učenicima na proizvoljan način (neki učenik može cak i ništa da ne dobije!), te smo zadatak svodi na prethodni (sa $m=3, n_1=5, n_2=6, n_3=7$). Stoga je traženi rezultat:
$$\binom{5+2}{2} \cdot \binom{6+2}{2} \cdot \binom{7+2}{2} = \binom{7}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{9}{2} = 21 \cdot 28 \cdot 36 = 21\,168.$$

53. Zadatak se svodi na $n_{\check{z}}+n_p+n_z+n_c=10$, sa uslovima $n_{\check{z}}, n_p, n_z, n_c \geq 0$ i $n_c \leq 9$. U ukupnom broju rešenja jednačine $n_{\check{z}}+n_p+n_z+n_c=10$ (to su neuredjeni izbori sa ponavljanjem: $\binom{10+3}{3}=286$) imamo samo jedno za koje je ispunjeno $n_c \geq 10$ – to je $(0,0,0,10)$, pa se kuglice mogu odabrati na $\binom{10+3}{3}-1=285$ načina.

54. I knjige i patuljci predstavljaju isti zadatak – "Od 12 mesta (na pravoj!) odabrati 5 nesusednih", dok vitezovi kralja Artura – "Od 12 mesta (na kružnici!) odabrati 5 nesusednih"!

   a), b) *I način:* Imamo sledeću situaciju: $\underset{n_1}{\underline{\quad}} \sqcup \underset{n_2}{\underline{\ *\ }} \sqcup \underset{n_3}{\underline{\ *\ }} \sqcup \underset{n_4}{\underline{\ *\ }} \sqcup \underset{n_5}{\underline{\ *\ }} \sqcup \underset{n_6}{\underline{\quad}}$, gde su $\sqcup$ odabrana mesta, na $\underline{\quad}$ može i da ne bude ničega, dok na $\underline{\ *\ }$ mora da bude bar jedno mesto. Preveden na matematički jezik, problem glasi: "Naći broj rešenja jednačine $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6=7$, uz uslove $n_2 \geq 1$, $n_3 \geq 1$, $n_4 \geq 1$, $n_5 \geq 1$". Njega svodimo na neuredjene izbore sa ponavljanjem smenom $m_1=n_1, m_2=n_2-1, m_3=n_3-1, m_4=n_4-1, m_5=n_5-1, m_6=n_6$ (sličnu ideju smo imali i u zadatku 52). Time smo dobili $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6=3$, uz $m_i \geq 0$, a rešenja ove jednačine ima
$$\binom{8}{5}=56.$$

II način: Problem je ekvivalentan nalaženju broja $(n+k)$-varijacija sa ponavljanjem skupa $\{0,1\}$, pri čemu ima $n=5$ jedinica i $k=7$ nula i nema susednih jedinica. Takvih varijacija ima $\binom{n+1}{k}$ jer jedinice mogu biti na bilo kom od sledećih $n+1$ mesta: ispred prve nule, izmedju prve i druge nule, izmedju druge i treće nule, ..., iza poslednje nule. Stoga je traženi rezultat

$$\binom{n+1}{k} = \binom{8}{5} = 56.$$

c) Uočimo jednog viteza, npr. Lanselota. Skup traženih izbora vitezova, I, možemo razbiti na dva skupa: L – koji sadrži Lanselota i N – koji ne sadrži Lanselota, tj. $I = L + N$. U L smo izabrali Lanselota, pa u preostalih $n-1=4$ viteza koje biramo ne može biti nijedan njegov sused (a ni Lanselot!) , tj. dobili smo isti zadatak kao pod a): "Od $n+k-3=9$ viteza odabrati $k-1=4$ koji nisu susedni". Znači,

$$|L| = \binom{(n+k-3)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{6}{4} = 15.$$

U N možemo birati i Lanselotove susede (jer njega nismo uzeli), pa se svodi na: "Od $n+k-1=11$ viteza odabrati $k=5$ koji nisu susedni". Znači,

$$|N| = \binom{(n+k-1)-k+1}{k} = \binom{7}{5} = 21.$$

Ukupan broj izbora viteza okruglog stola je

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k} = 36.$$

55. *I način:* Funkciju $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, tj. $f(1)=f(2)=1, f(3)=3, f(4)=f(5)=4$ možemo predstaviti kao $*$II$**$I$*$II$*$ (I su prečage koje razdvajaju vrednosti funkcije). Na sličan način možemo predstaviti proizvoljnu neopadajuću funkciju. Vrednost $f(k)$ možemo dobiti tako što izbrojimo koliko ima zvezdica pre k-te prečage. Na početku mora biti $*$ (inače bi bilo $f(1)=0$), pa se zadatak svodi na broj nizova od n prečaga i $n-1$ zvezdica (prvu ne brojimo!), što je jednako broju izbora mesta za prečage iz skupa $\{2,3,\ldots,2n\}$, tj.

$$\binom{2n-1}{n}.$$

II način: Neopadajuću funkciju $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ ($\mathbb{N}_n = \{1,2,\ldots,n\}$) možemo zadati kao n-torku njenih slika: $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Skup svih takvih funkcija označimo sa $\mathcal{F}$, a sa $P_n(\mathbb{N}_{2n-1})$ skup svih n-elementnih podskupova skupa $\mathbb{N}_{2n-1} = \{1,2,\ldots,2n-1\}$. Razmotrimo preslikavanje

$F : \mathcal{F} \to P_n(\mathbb{N}_{2n-1})$ dato sa $F((f_1, f_2, \ldots, f_n)) = \{f_1, f_2{+}1, f_3{+}2 \ldots, f_n{+}(n-1)\}$.

Iz $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$ sledi $f_1 < f_2 + 1 < \ldots < f_n + (n-1)$, te je slika funkcije f pri preslikavanju F jedan n-elementni podskup skupa $\mathbb{N}_{2n-1}$, tj. preslikavanje F je dobro definisano.

Neka su f i g dve različite neopadajuće funkcije. Tada postoji broj i takav da je $f_1 = g_1, \ldots, f_{i-1} = g_{i-1}$ i $f_i < g_i$ (analogno ide za $f_i > g_i$), gde je $1 \leq i \leq n$. Odatle sledi $f_i + (i-1) < g_i + (i-1)$ i $f_i + (i-1) \notin F(g)$. Stoga je $F(f) \neq F(g)$, te je preslikavanje F injektivno ("1–1").

Neka je $Y \subset \mathbb{N}_{2n-1}$, za koji je $|Y| = n$. Stavimo $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, pri čemo je $1 \leq y_1 < y_2 < \ldots < y_n \leq 2n-1$. Neka je $b_i = y_i - (i-1)$ za svako $1 \leq i \leq n$. Tada je $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ i $b_i \in \mathbb{N}_n$ za svako $1 \leq i \leq n$. Iz definicije funkcije F sledi da je $F((b_1, \ldots, b_n)) = Y$, pa je preslikavanje F i surjektivno ("na").

Kako je F bijekcija broj neopadajućih funkcija $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ jednak je $|P_n(\mathbb{N}_{2n-1})| = \binom{2n-1}{n}$.

56. Primetimo najpre da familija $\mathcal{F}_k$ svih k-podskupova skupa X predstavlja antilanac i sadrži $|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{k}$ skupova. Stoga, za $k = [n/2]$, vidimo da postoji antilanac sa $\binom{n}{[n/2]}$ skupova.

Sada, ako je $\mathcal{F}$ proizvoljni antilanac skupa X, dokazaćemo da je $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{[n/2]}$. Glavna ideja dokaza se sastoji u prebrojavanju *lanaca* podskupova $\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n = X$, gde je $|C_i| = i$ za $i = 0, 1, \ldots, n$.

S jedne strane, svaki lanac se dobija dodavanjem jednog po jednog elementa skupa X, tako da je broj lanaca jednak broju permutacija skupa X, tj. $n!$.

S druge strane, za $A \in \mathcal{F}$ posmatrajmo broj lanaca koji sadrže A. Da bi u lancu stigli od $\emptyset$ do A, elementi skupa A se dodaju jedan po jedan, a da bi nastavili od A do X, dodaju se elementi iz skupa $X \setminus A$. Stoga, ako je $|A| = k$, spajanjem početnih delova lanaca (od $\emptyset$ do A) i završnih delova lanaca (od A do X), vidimo da postoji tačno $k!(n-k)!$ lanaca koji sadrže A.

Primetimo da nijedan lanac ne prolazi istovremeno kroz različite skupove A i B iz familije $\mathcal{F}$, pošto je $\mathcal{F}$ antilanac. Neka m_k označava broj k-podskupova u $\mathcal{F}$. Tada je

$$|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k.$$

Iz prethodnog se vidi da je broj lanaca koji prolaze kroz neki skup familije $\mathcal{F}$ jednak

$$\sum_{k=0}^{n} m_k\, k!\,(n-k)!,$$

i ovaj broj ne može da predje $n!$, koliki je broj *svih* lanaca. Stoga je

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Kako, prema zadatku 39, važi $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{[n/2]}$ za svako k, zaključujemo da je

$$\frac{1}{\binom{n}{[n/2]}} \sum_{k=0}^{n} m_k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k \leq \binom{n}{[n/2]}.$$

57. Krenimo od desne strane i sve ove multinomijalne koeficijente svedimo na zajednički imenilac:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k} \binom{n-1}{n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \ldots, n_k} \\
= \; & \sum_{i=1}^{k} \frac{(n-1)!}{n_1! \ldots n_{i-1}!(n_i-1)! n_{i+1}! \ldots n_k!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i (n-1)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \\
= \; & \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)(n-1)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{n(n-1)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \\
= \; & \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k},
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

58. Dokazaćemo formulu matematičkom indukcijom po n.

Baza indukcije je za $n = 1$:

$$(x+y)^{\underline{1}} = x + y = y + x = \binom{1}{0} x^{\underline{0}} y^{\underline{1}} + \binom{1}{1} x^{\underline{1}} y^{\underline{0}} .$$

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $n = k$:

$$(x+y)^{\underline{k}} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{k-i}} .$$

Indukcijski korak: Pokazaćemo da tvrdjenje važi za $n = k + 1$.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{\underline{k+1}} &= (x+y)^{\underline{k}} \cdot (x+y-k) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{k-i}} \right) \cdot \big((x-i) + (y-(k-i)) \big) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{\underline{i+1}} y^{\underline{k-i}} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{k+1-i}} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} x^{\underline{j}} y^{\underline{k+1-j}} + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{\underline{j}} y^{\underline{k+1-j}} \\
&= x^{\underline{k+1}} + \sum_{j=1}^{k} (\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}) x^{\underline{j}} y^{\underline{k+1-j}} + y^{\underline{k+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} x^{\underline{j}} y^{\underline{k+1-j}} .
\end{aligned}
$$

Time, po principu matematičke indukcije, formula važi za svaki prirodan broj n.

59. *I način:* Dopunimo $(2+\sqrt{3})^n$ sa $(2-\sqrt{3})^n$ – tada je $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ prirodan broj. Kako iz $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ sledi $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$, a odatle imamo da je

$$\left[(2+\sqrt{3})^n\right] = \left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] - 1 = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1$$

$$\left[(2+\sqrt{3})^n\right] = 2\left(2^n + \binom{n}{2}2^{n-2}3 + \binom{n}{4}2^{n-4}3^2 + \dots\right) - 1$$

pa je traženi broj neparan (u poslednjem koraku smo koristili binomnu formulu).

II način: Kao i u prvom načinu dolazimo do

$$\left[(2+\sqrt{3})^n\right] = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1.$$

Označimo sa

$$a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$$

i pokažimo da je taj broj paran. Brojevi $2+\sqrt{3}$ i $2-\sqrt{3}$ su koreni karakteristične jednačine $t^2 - 4t + 1 = 0$, što nam daje rekurentnu formulu

$$a_n - 4a_{n-1} + a_{n-2} = 0.$$

Početne uslove dobijamo iz samog niza: $a_0 = 2$ i $a_1 = 4$. Kako su prva dva člana parni brojevi i rekurentna veza je $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ matematičkom indukcijom dobijamo da su svi članovi niza $\{a_n\}$ parni. Stoga je $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ neparan.

60. *I način:* Koeficijent polinoma uz x^n je jednak

$$a_n = \binom{100}{n} 3^n (-2)^{100-n}.$$

Zbir svih koeficijenata je

$$\sum_{n=0}^{100} a_n = \sum_{n=0}^{100} \binom{100}{n} 3^n (-2)^{100-n} = (3-2)^{100} = 1.$$

II način: Zbir svih koeficijenata polinoma jednak je $P(1)$.

$$P(1) = (3 \cdot 1 - 2)^{100} = 1.$$

61. a) Član polinoma x^2y^3z se dobija samo od

$$\binom{6}{2,3,1} \cdot (2x)^2 \cdot (2y)^3 \cdot (-3z)^1 = -5760x^2y^3z.$$

Dakle traženi koeficijent je -5760.

b) Član polinoma x^2y^8z se dobija samo od

$$\binom{7}{2,4,1} \cdot (2x)^2 \cdot (y^2)^4 \cdot (-5z)^1 = -2100x^2y^8z.$$

Dakle traženi koeficijent je -2100.

c) Da bismo dobili član koji ima z^3 moramo $-2z$ da podignemo na treći stepen, a ostatak izraza na četvrti: $\binom{7}{3}(-2z)^3(3uv+u+v)^4$. Član u^2v^3 se dobija samo od $\binom{4}{1,1,2} \cdot (3uv)^1 \cdot u^1 \cdot v^2$. Stoga se $u^2v^3z^3$ dobija iz

$$\binom{7}{3}(-2z)^3 \binom{4}{1,1,2} \cdot (3uv)^1 \cdot u^1 \cdot v^2 = -10080u^2v^3z^3.$$

Dakle traženi koeficijent je -10080.

62. a) Član x^{10} može se dobiti samo iz sledećih proizvoda: $(x^2)^2(x^3)^2$ i $(x^2)^5(x^3)^0$. Stoga iz

$$\binom{11}{7,2,2} \cdot 1^7 \cdot (-x^2)^2 \cdot (x^3)^2 + \binom{11}{6,5,0} \cdot 1^6 \cdot (-x^2)^5 \cdot (x^3)^0 = 1518x^{10}$$

dobijamo traženi koeficijent: 1518.

b) Član x^3 može se dobiti samo kao $x^1(x^2)^1$ i $x^3(x^2)^0$. Stoga iz

$$\binom{9}{7,1,1} \cdot 1^7 \cdot (-x)^1 \cdot (2x^2)^1 + \binom{9}{6,3,0} \cdot 1^6 \cdot (-x)^3 \cdot (2x^2)^0 = -228x^3$$

dobijamo koeficijent: -228.

63. a) Korišćenjem binomne teoreme za $x = y = 1$ dobijamo:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}.$$

b) Iz prethodnog dela i binomne teoreme za $x = y = 1$ dobijamo:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = n2^{n-1} + 2^n = (n+2)2^{n-1}.$$

c) Ovde koristimo dva puta binomnu teoremu za $x = 1, y = -1$ i slično kao u prethodna dva dela dobijamo:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1} + 0 = 0.$$

64. Imamo da je

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

65. Označimo datu sumu sa $x_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\binom{n+k}{k}$. Korišćenjem adicione formule za binomne koeficijente i sledeće jednakosti

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n+1}}\binom{2n+1}{n+1} &= \frac{(2n+1)!}{2^{n+1}n!(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+2}(n+1)!(n+1)!}\\ &= \frac{1}{2^{n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\end{aligned}$$

dobijamo

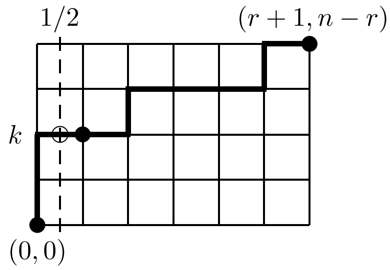
$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}\binom{n+1+k}{k} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}\binom{n+k}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}\binom{n+k}{k-1} =$$

$$x_n+\frac{1}{2^{n+1}}\binom{2n+1}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{2^{k-1}}\binom{n+k}{k-1}-\frac{1}{2^{n+2}}\binom{2n+2}{n+1}=x_n+\frac{1}{2}x_{n+1},$$

a odatle je $x_{n+1}=2x_n$. Sa tom rekurentnom vezom i početnim uslovom $x_0=1$ lako, matematičkom indukcijom, pokazujemo da je $x_n=2^n$.

66. *I način:* Izraz na desnoj strani, $\binom{n+1}{r+1}$, odgovara izboru $(r+1)$-članog podskupa skupa $\{1,2,\ldots,n+1\}$. Uočimo najveći izabrani broj u tom podskupu – neka je to $k+1$. Tada ostalih r brojeva tog podskupa biramo iz skupa $\{1,2,\ldots,k\}$, što se može učiniti na $\binom{k}{r}$ načina. Kako k može biti proizvoljan broj $r\le k\le n$, brojanjem na ovaj način dobijamo sumu sa leve strane.

II način: Posmatrajmo skup L svih najkraćih izlomljenih linija koje idu



po linijama celobrojne rešetke i spajaju tačke $(0,0)$ i $(r+1,n-r)$. Njih ima $\binom{r+1+n-r}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ (vidi rešenje zadatka 40). Označimo sa B_k skup izlomljenih linija koje seku pravu $x=1/2$ u tački $(1/2,k)$, $k=0,1,\ldots,n-r$. Njih ima koliko i najkraćih linija koje spajaju tačke $(1,k)$ i $(r+1,n-r)$, a to je $\binom{n-k}{r}$. Kako skupovi B_k čine razbijanje skupa L,

$$L=B_0\cup B_1\cup\ldots\cup B_{n-r},$$

dobijamo da je

$$\binom{n+1}{r+1}=\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n-k}{r}=\sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r}.$$

67. Izrazimo k^4 preko $\binom{k}{4},\binom{k}{3},\binom{k}{2},\binom{k}{1}$:

$$k^4=24\binom{k}{4}+36\binom{k}{3}+14\binom{k}{2}+\binom{k}{1}.$$

Za dobijanje tražene sume iskoristićemo rezultat prethodnog zadatka:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \sum_{k=1}^{n} 24\binom{k}{4} + 36\binom{k}{3} + 14\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \\
&= 24\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{4} + 36\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3} + 14\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} \\
&= 24\sum_{k=4}^{n}\binom{k}{4} + 36\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3} + 14\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} \\
&= 24\binom{k+1}{5} + 36\binom{k+1}{4} + 14\binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{2} \\
&= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.
\end{aligned}$$

68. U oba dela koristimo sumacionu formulu (videti zadatak 66):

a) Imamo da je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{m!(k-m)!} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\binom{k-1}{m-1} = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{j}{m-1}$$

i na osnovu sumacione formule dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{k}{m} = \frac{1}{m}\binom{n}{m}.$$

b) Sada važi da je

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{k}{m} - \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)!}{m!(k-m)!} - \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}$$

$$= (m+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{k+1}{m+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = (m+1)\binom{n+2}{m+2} - \binom{n+1}{m+1}.$$

69. a) Ako je $n = m$ imamo $\sum_{k=n}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{n} = (-1)^n\binom{n}{n}\binom{n}{n} = (-1)^n$. Drugi deo tvrdjenja pokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: za $n = m+1$ imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}\binom{k}{m} &= (-1)^m\binom{m+1}{m}\binom{m}{m} \\
&+ (-1)^{m+1}\binom{m+1}{m+1}\binom{m+1}{m} \\
&= ((-1)^m + (-1)^{m+1})(m+1) = 0.
\end{aligned}$$

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da je za neko N i svako n, $m+1 < n \leq N$, ispunjeno

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m} = 0.$$

Indukcijski korak: Pokažimo da je i za $n = N+1$ odgovarajuća suma jednaka nuli:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m}^{N+1} (-1)^k \binom{N+1}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{N+1} (-1)^k \left(\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1}\right)\binom{k}{m} \\
= \;& \sum_{k=m}^{N} (-1)^k \binom{N}{k}\binom{k}{m} + \sum_{k=m}^{N+1} (-1)^k \binom{N}{k-1}\binom{k}{m} \\
= \;& \sum_{k=m}^{N} (-1)^k \binom{N}{k}\binom{k}{m} + \sum_{k=m-1}^{N} (-1)^{k+1} \binom{N}{k}\binom{k+1}{m} \\
= \;& \sum_{k=m}^{N} (-1)^k \binom{N}{k}\binom{k}{m} + \sum_{k=m-1}^{N} (-1)^{k+1} \binom{N}{k}\left(\binom{k}{m} + \binom{k}{m-1}\right) \\
= \;& \sum_{k=m}^{N} (-1)^k \binom{N}{k}\binom{k}{m} + \sum_{k=m-1}^{N} (-1)^{k+1} \binom{N}{k}\binom{k}{m} + \\
& + \sum_{k=m-1}^{N} (-1)^{k+1} \binom{N}{k}\binom{k}{m-1} \\
= \;& \sum_{k=m}^{N} \left((-1)^k + (-1)^{k+1}\right)\binom{N}{k}\binom{k}{m} - \sum_{k=m-1}^{N} (-1)^k \binom{N}{k}\binom{k}{m-1} \\
= \;& 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

b) *I način:* Svaki sabirak sume ima sledeću kombinatornu interpretaciju: dat je skup A od n elemenata i biramo podskupove B i C tako da važi $C \subseteq B \subseteq A$ i $|B| = k$, $|C| = m$. Tražena suma odgovara izboru podskupova B i C tako da važi $C \subseteq B \subseteq A$ i $|C| = m$, a $m \leq |B| = k \leq n$. Skup C možemo izabrati na $\binom{n}{m}$ načina, a svaki od preostalih $n-m$ elemenata iz skupa $A \setminus C$ može da bude, a može i da ne bude (2 mogućnosti) u skupu B, tako da ako nam je C odredjen skup B možemo da izaberemo na 2^{n-k} načina. Tako smo došli do rezultata: $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-k}$.

II način: Pomoću

$$\begin{aligned}
\binom{k}{m}\binom{n}{k} &= \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{m!} \cdot \frac{1}{(k-m)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}
\end{aligned}$$

dobijamo da je tražena suma

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$$

$$=\binom{n}{m}\sum_{k=m}^{n}\binom{n-m}{n-k}=\binom{n}{m}\cdot 2^{n-k}.$$

70. Suma na levoj strani ima sledeću interpretaciju. k elemenata iz skupa M, pri čemu $|M|=m$, može se odabrati na $\binom{m}{k}$ načina i neka oni čine skup X. Neka je N skup sa $|N|=n$ elemenata koji nema zajedničkih elemenata sa M ($N\bigcap M=\emptyset$). m elemenata iz unije $N\bigcup X$ može se odabrati na $\binom{n+k}{m}$ načina i neka oni čine skup Y. Stoga je broj uredjenih parova skupova (X,Y), takvih da je $X\subseteq M$, $Y\subseteq N\bigcup X$, $|X|=k$ i $|Y|=m$, jednak je $\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}$. Broj uredjenih parova skupova (X,Y), takvih da je $X\subseteq M$, $Y\subseteq N\bigcup X$ i $|Y|=m$, jednak je $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m}$.

Ovaj izbor možemo napraviti i ako prvo odredimo skupove $Y\bigcap M$ i $Y\bigcap N$. Ako $|Y\bigcap N|=j$, gde $0\le j\le m$ tada je $|Y\bigcap M|=m-j$. Znači skup Y, uz uslove $|Y\bigcap N|=j$ i $|Y\bigcap M|=m-j$, možemo izabrati na $\binom{n}{j}\binom{m}{m-j}=\binom{n}{j}\binom{m}{j}$ načina. Ostaje da odredimo skup X koji zadovoljava $Y\bigcap M\subseteq X\subseteq M$ (uslov $Y\subseteq N\bigcup X$ povlači $Y\bigcap M\subseteq (N\bigcup X)\bigcap M=(N\bigcap M)\bigcup(X\bigcap M)=\emptyset\bigcup X=X$). Skup X može biti odredjen na 2^j načina, jer za svaki od j elemenata skupa $M\setminus(Y\bigcap M)$ imamo dve mogućnosti: ili da pripada ili da ne pripada skupu X. Znači, Broj uredjenih parova skupova (X,Y), takvih da je $X\subseteq M$, $Y\subseteq N\bigcup X$ i $|Y|=m$, jednak je $\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{m}{j}2^j$. Odavde sledi tvrdjenje zadatka.

71. U prvom koraku sredjivanja sume

$$S=\sum_{k\ge 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

pribeći ćemo pojednostavljivanju proizvoda:

$$\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}=\binom{n+k}{k}\binom{n+k-k}{2k-k},$$

što nam daje

$$S=\sum_{k\ge 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Sledeća osobina koju koristimo je izvlačenje iz zagrada:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1},$$

što nam daje

$$S = \frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k.$$

Sada ćemo upotrebiti negaciju gornjeg indeksa da bismo "pojeli" član $(-1)^k$: $\binom{n+k}{k}(-1)^k = \binom{-n-1}{k}$, što nam daje

$$S = \frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{-n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}.$$

Sada ćemo u poslednjem koraku iskoristi sumu proizvoda

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n} = \binom{r+s}{s-n}$$

sa $r = -n-1$, $s = n+1$ i $n = 1$:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{-n-1}{k}\binom{n+1}{k+1} = \binom{-n-1+n+1}{n+1-1},$$

što nam daje

$$S = \frac{1}{n+1}\binom{0}{n}.$$

Kako je $\binom{0}{n} = 0$ za $n > 0$, a $\binom{0}{n} = 1$ za $n = 0$, dobijamo konačni rezultat

$$S = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases}.$$

72. Označimo sa $S = \sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n}$. Ako poslušamo uputstvo dobijamo:

$$\begin{aligned} S &= \sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j} \\ &= \sum_k\sum_j \binom{n+r-s}{n-k}\binom{r}{m+n-j}\binom{m-r+s}{k}\binom{k}{j}. \end{aligned}$$

Sada iskoristimo osobinu za pojednostavljenje proizvoda:

$$\binom{m-r+s}{k}\binom{k}{j} = \binom{m-r+s}{j}\binom{m-r+s-j}{k-j}.$$

Dobijamo

$$S = \sum_k\sum_j \binom{n+r-s}{n-k}\binom{r}{m+n-j}\binom{m-r+s}{j}\binom{m-r+s-j}{k-j}.$$

Zatim ćemo prvo sumirati po k, korišćenjem Vandermondove konvolucije ($r = m - r + s - j$,$m = -j$,$s = n + r - s$,$n = n$):

$$S = \sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{m-r+s}{j}\sum_k \binom{m-r+s-j}{k-j}\binom{n+r-s}{n-k}$$
$$= \sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{m-r+s}{j}\binom{m+n-j}{n-j}.$$

Onda iskoristimo uslov simetričnosti, a zatim opet osobinu za pojednostavljivanje proizvoda:

$$\binom{r}{m+n-j}\binom{m+n-j}{n-j} = \binom{r}{m+n-j}\binom{m+n-j}{m} = \binom{r}{m}\binom{r-m}{n-j}.$$

Dobijamo

$$S = \sum_j \binom{m-r+s}{j}\binom{r}{m}\binom{r-m}{n-j}.$$

Sada izvučemo $\binom{r}{m}$, a zatim još jednom iskoristimo Vandermondove konvolucije ($r = m - r + s$,$m = 0$,$s = r - m$,$n = n$):

$$S = \binom{r}{m}\sum_j \binom{m-r+s}{j}\binom{r-m}{n-j} = \binom{r}{m}\binom{s}{n}.$$

73. Neka je $\varepsilon = e^{2\pi i/m} = \cos 2\pi m + i \sin 2\pi m$, tj. ε je m-ti koren iz 1, različit od 1, pa iz $\varepsilon^m = 1$ sledi $\varepsilon^m - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^{m-1} + \cdots + \varepsilon + 1) = 0$, što nam daje $\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{m-2} + \cdots + \varepsilon + 1 = 0$. Ako u binomnoj teoremi $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ stavimo $x = 1$ i redom $y = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m-1}$ dobijamo:

$$(1+\varepsilon^0)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n},$$
$$(1+\varepsilon)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 + \cdots + \binom{n}{n}\varepsilon^n,$$
$$(1+\varepsilon^2)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon^2 + \binom{n}{2}\varepsilon^4 + \cdots + \binom{n}{n}\varepsilon^{2n},$$
$$\cdots$$
$$(1+\varepsilon^{m-1})^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon^{m-1} + \binom{n}{2}\varepsilon^{2(m-1)} + \cdots + \binom{n}{n}\varepsilon^{n(m-1)}.$$

Ako pomnožimo sve ove jednakosti redom sa ε^0, ε^{-k}, ε^{-2k}, ..., $\varepsilon^{-(m-1)k}$, a zatim ih saberemo i iskoristimo činjenicu

$$1 + \varepsilon^{j-k} + \varepsilon^{2(j-k)} + \cdots + +\varepsilon^{(m-1)(j-k)} = \begin{cases} 0, & j \equiv k(\mod m) \\ m, & j \not\equiv k(\mod m) \end{cases}$$

dobijamo

$$\sum_{j=0}^{m-1}(1+\varepsilon^j)^n\varepsilon^{-kj} = m\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+m}+\binom{n}{k+2m}+\cdots\right].$$

Levu stranu ove jednakosti možemo transformisati

$$\sum_{j=0}^{m-1}(1+\varepsilon^j)^n\varepsilon^{-kj} = \sum_{j=0}^{m-1}(\varepsilon^{j/2}+\varepsilon^{-j/2})^n\varepsilon^{jn/2-jk}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}\left(\cos\frac{j\pi}{m}\right)^n\left[\cos\frac{j(n-2k)\pi}{m}+i\sin\frac{j(n-2k)\pi}{m}\right],$$

a kako je desna strana realan broj to i leva mora biti realan broj, te je stoga koeficijent na desnoj strani uz imaginarnu jedinicu jednak nula, što nam daje tvrdjenje zadatka:

$$m\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+m}+\binom{n}{k+2m}+\cdots\right] = \sum_{j=0}^{m-1}\left(\cos\frac{j\pi}{m}\right)^n\cos\frac{j(n-2k)\pi}{m},$$

odnosno

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+m}+\binom{n}{k+2m}+\cdots = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\cos\frac{j\pi}{m}\right)^n\cos\frac{j(n-2k)\pi}{m}.$$

74. Označimo sa $\mathcal{M}$ skup učenika koji vole matematiku, sa Φ skup učenika koji vole fiziku i sa $\mathcal{X}$ skup učenika koji vole hemiju. Tada po principu uključenja-isključenja dobijamo da učenika koji vole bar jedan od ovih predmeta ima

$$|\mathcal{M}\bigcup\Phi\bigcup\mathcal{X}|$$

$$= |\mathcal{M}|+|\Phi|+|\mathcal{X}|-|\mathcal{M}\bigcap\Phi|-|\Phi\bigcap\mathcal{X}|-|\mathcal{M}\bigcap\mathcal{X}|+|\mathcal{M}\bigcap\Phi\bigcap\mathcal{X}|$$

$$= 12+14+13-5-7-4+3 = 26.$$

Znači, u razredu ima $30-26=4$ učenika koji ne vole ni jedan od ovih predmeta.

75. Označimo sa A_k skup prirodnih brojeva ne većih od n koji su deljivi sa k. Njih ima $\left[\frac{n}{k}\right]$, gde [ ] označava ceo deo broja. U preseku $A_i\cap A_j$ se nalaze tačno oni brojevi koji su deljivi i sa i i sa j, pa je zato taj presek jednak skupu $A_{NZS(i,j)}$. Kada primenimo formulu uključenja i isključenja dobijamo da prirodnih brojeva ne većih od 1000 koji su deljivi bar jednim od brojeva 2, 3, 5 ili 7 ima

$$|A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7| = |A_2|+|A_3|+|A_5|+|A_7|-|A_2\cap A_3|-|A_2\cap A_5|-|A_3\cap A_5|$$

$$-|A_2 \cap A_7| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7|$$
$$+|A_3 \cap A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{7}\right]$$
$$-\left[\frac{1000}{6}\right] - \left[\frac{1000}{10}\right] - \left[\frac{1000}{15}\right] - \left[\frac{1000}{14}\right] - \left[\frac{1000}{21}\right] - \left[\frac{1000}{35}\right] + \left[\frac{1000}{30}\right]$$
$$+\left[\frac{1000}{42}\right] + \left[\frac{1000}{70}\right] + \left[\frac{1000}{105}\right] - \left[\frac{1000}{210}\right] = 500 + 333 + 200 + 142 - 166 - 100$$
$$-66 - 71 - 47 - 28 + 33 + 23 + 14 + 9 - 4 = 772.$$

76. Dokaz ide indukcijom po broju skupova n. Za $n = 1$ tvrdjenje je trivijalno ispunjeno: $|S_1| = |S_1|$. Baza indukcije je za $n = 2$: $|S_1 \bigcap S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \bigcup S_2|$, što očigledno važi.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $n = k - 1$:

$$\left|S_1 \bigcap S_2 \bigcap \ldots \bigcap S_{k-1}\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,k-1\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcup_{i \in I} S_i\right|.$$

Indukcijski korak: Pokazaćemo da formula važi i za $n = k$. Označimo sa s levu stranu: $s = |S_1 \bigcap S_2 \bigcap \ldots \bigcap S_k| = \left|\bigcap_{i=1}^k S_i\right|$. Ako primenimo bazu indukcije za $n = 2$ skupa, sa $S_1 \bigcap S_2 \bigcap \ldots \bigcap S_{k-1}$ kao prvim i S_k kao drugim skupom, distributivnost unije u odnosu na presek i dva puta induktivnu pretpostavku (za $|S_1 \bigcap S_2 \bigcap \ldots \bigcap S_{k-1}|$ i $|(S_1 \bigcup S_k) \bigcap (S_2 \bigcup S_k) \bigcap \ldots \bigcap (S_{k-1} \bigcup S_k)|$, redom) dobijamo:

$$\begin{aligned}
s &= |\bigcap_{i=1}^{n} S_i| = \left|\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} S_i\right) \bigcap S_k\right| \\
&= \left|\bigcap_{i=1}^{k-1} S_i\right| + |S_k| - \left|\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} S_i\right) \bigcup S_k\right| \\
&= \left|\bigcap_{i=1}^{k-1} S_i\right| + |S_k| - \left|\bigcap_{i=1}^{k-1} (S_i \cup S_k)\right| \\
&= \left(\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,k-1\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcup_{i \in I} S_i\right|\right) + |S_n| \\
&\quad - \left(\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,k-1\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcup_{i \in I} (S_i \cup S_k)\right|\right) \\
&= \left(\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcup_{i \in I} S_i\right|\right).
\end{aligned}$$

(Obratiti pažnju na pojavu k umesto $k-1$ u poslednjem delu jednakosti: zašto to k obuhvata sva tri sabirka iz prethodnog dela jednakosti?) Time smo na osnovu principa matematičke indukcije pokazali da formula

$$|S_1 \bigcap S_2 \bigcap \ldots \bigcap S_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcup_{i \in I} S_i \right|$$

važi za svaki prirodan broj n.

77. a) Označimo sa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ skup razglednica, a sa $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ skup prijatelja. Zadatak je ekvivalentan sledećem problemu: koliko ima surjektivnih ("na") funkcija $f : X \to Y$? Neka je to s. Označimo sa A_i $(1 \leq i \leq n)$ skup funkcija iz X u Y koje zadovoljavaju da y_i nije slika nijednog elementa iz X, tj. $A_i = \{f : X \to Y \mid y_i \notin f(X)\}$. Kako je ukupan broj funkcija iz X u Y jednak n^k dobijamo da je $s = n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$. Na osnovu principa uključenja i isključenja to je jednako

$$s = n^k - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^n \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

A_i je skup funkcija iz X koje uzimaju vrednosti iz skupa $Y \setminus \{y_i\}$, pa je stoga $|A_i| = (n-1)^k$; $A_i \cap A_j$ je skup funkcija iz X koje uzimaju vrednosti iz skupa $Y \setminus \{y_i, y_j\}$, te je $|A_i \cap A_j| = (n-2)^k$; generalno presek m ovakvih skupova ima $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}| = (n-m)^k$ elemenata $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq k)$. Kako ima $\binom{n}{m}$ podskupova indeksa $M \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} = N_n$ uz uslov $|M| = m$, sledi da svaka suma $\sum_{M \subseteq N_n, |M|=m} \left|\bigcap_{i \in M} A_i\right|$ sadrži $\binom{n}{m}$ članova od kojih je svaki jednak $(n-m)^k$. To nam daje traženi rezultat:

$$s = n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^k.$$

b) Ovo je direktna posledica dela pod a). l prijatelja koji ne treba da dobiju razglednicu možemo odabrati na $\binom{n}{l}$ načina, a preostalih $n-l$ prijatelja treba da dobiju k različitih razglednica, tako da svako od njih dobije bar jednu (ako bi neko od njih dobio 0 onda ne bi tačno l prijatelja ostalo bez razglednice!). Stoga je rezultat:

$$\binom{n}{l} \cdot \left((n-l)^k - \binom{n-l}{1}(n-l-1)^k + \cdots + (-1)^{n-l-1}\binom{n-l}{n-l-1}1^k \right).$$

78. Iz skupa nenula cifara, $\{1, 2, \ldots, 9\}$ možemo izabrati k različitih cifara $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ na $\binom{9}{k}$ načina. Neka je A skup n-tocifrenih brojeva sa ciframa iz skupa C, a $A_i \subset A$ skup n-tocifrenih brojeva koje ne sadrže cifru c_i. Broj n-tocifrenih brojeva u čijim zapisima učestvuju

samo cifre $C \setminus \{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_s}\}$ (ne moraju sve) jednak je $(k-s)^n$ (to je ustvari broj elemenata skupa $A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap \ldots \bigcap A_{i_s}$), dok skup $\{c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_s}\}$ iz polaznog skupa od k cifara možemo odabrati na $\binom{k}{s}$ načina. Skup $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_k$ sadrži sve n-tocifrene brojeve u kojima se bar jedna cifra iz C ne javlja, a $A \setminus (A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_k)$ je skup n-tocifrenih brojeva u kojima se sve cifre iz C pojavljuju. Kada ovo ubacimo u formulu uključenja i isključenja dobijamo da je traženi rezultat $\binom{9}{k} \cdot \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} (k-s)^n$.

79. Da bi rezultat eksperimenta bio niz n cifara potrebno je da u prvih $n-1$ bacanja pada samo nekih pet strana, a u n-tom bacanju padne preostala, šesta, strana. Tu šestu stranu možemo odabrati na $\binom{6}{1} = 6$ načina, a eksperiment dužine n je onda potpuno odredjen uredjenim izborom sa ponavljanjem $n-1$ elemenata iz skupa preostalih pet strana, $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, gde se svaka strana javlja bar jednom. Ovo je isti problem koji smo već rešili u zadatku 77.a) pa takvih nizova ima $5^{n-1} - \binom{5}{1} \cdot 4^{n-1} + \binom{5}{2} \cdot 3^{n-1} - \binom{5}{3} \cdot 2^{n-1} + \binom{5}{4} \cdot 1^{n-1}$ (razglednice su sada strane kocke, a prijatelji predstavljaju redne brojeve bacanja). Stoga je ukupan broj eksperimenata dužine n jednak $6 \cdot (5^{n-1} - 5 \cdot 4^{n-1} + 10 \cdot 3^{n-1} - 10 \cdot 2^{n-1} + 5)$.

80. Devet ljudi mogu se poredjati u niz na 9! načina. Rasporeda u kojima su 3 fiksirana zemljaka jedan do drugog ima $3! \cdot 7!$: ta tri zemljaka mogu biti u bilo kom od 3! rasporeda, a zatim se ta trojka (kao novi objekat) sa preostalih 6 ljudi može rasporediti na 7! načina. Iz koje su oni zemlje može se odabrati na $\binom{3}{1} = 3$ načina. Rasporeda u kojima su dve (fiksirane) trojke susednih zemljaka ima $(3!)^2 \cdot 5!$, a te dve zemlje biramo na $\binom{3}{2} = 3$ načina. Rasporeda u kojima su tri trojke susednih zemljaka ima $(3!)^3 \cdot 3!$, a sve tri zemlje biramo na $\binom{3}{3} = 1$ način. Kad sve to uvrstimo u formulu uključenja i isključenja dobijamo da traženih rasporeda ima $9! - 3 \cdot 3! \cdot 7! + 3 \cdot (3!)^2 \cdot 5! - (3!)^3 \cdot 3! = 362880 - 90720 + 12960 - 1296 = 283824$.

81. U reči KOMBINATORIKA slova K, O, I i A se javljaju dva puta, a ostalih pet M, B,N, T, R po jednom. Ukupan broj permutacija sa ponavljanjem svih slova reči KOMBINATORIKA jednak je $\binom{13}{2,2,2,2,1,1,1,1,1}$. Permutacija u kojima je jedan par susednih istih slova imamo $\binom{12}{2,2,2,1,1,1,1,1,1}$, jer se ta dva slova mogu identifikovati kao jedno novo slovo (različito od svih ostalih); permutacija u kojima su dva para susednih istih slova imamo $\binom{11}{2,2,1,1,1,1,1,1,1}$, jer se ta dva slova mogu identifikovati kao dva nova slova; permutacija u kojima su tri para susednih istih slova imamo $\binom{10}{2,1,1,1,1,1,1,1,1}$ i permutacija u kojima su sva četiri para susednih istih slova imamo $\binom{9}{1,1,1,1,1,1,1,1,1}$. Te parove istih slova možemo odabrati na $\binom{4}{1}$, odnosno $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$, $\binom{4}{4}$ načina. Kada sve to uvstimo u formulu uključenja i isključenja dobijamo da je traženi broj reči jednak $\binom{13}{2,2,2,2,1,1,1,1,1} - \binom{4}{1}\binom{12}{2,2,2,1,1,1,1,1,1} + \binom{4}{2}\binom{11}{2,2,1,1,1,1,1,1,1} - \binom{4}{3}\binom{10}{2,1,1,1,1,1,1,1,1} + \binom{4}{4}\binom{9}{1,1,1,1,1,1,1,1,1} = 202\,668\,480$.

Napomena: A_1 iz formule uključenja i isključenja predstavlja skup reči koje imaju dva susedna slova K, A_2 dva susedna O, A_3 dva susedna I i A_4 dva susedna A. Skup $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup A_4$ je skup svih reči koje imaju bar dva ista slova susedna, a tražene reči predstavljaju komplement tog skupa u odnosu na sve reči od tih slova!

82. a) Neka je $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Označimo sa A_i skup svih brojeva iz N_n koji su deljivi prostim brojem p_i. Skup $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq k)$ ima za elemente brojeve koji su deljivi sa svakim od $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m}$, tj. sa $p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}$ (jer su ti prosti brojevi uzajamno prosti). Na osnovu zadatka 75 imamo da skup $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}$ ima

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}| = \left[\frac{n}{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}}\right] = \frac{n}{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_m}}$$

elemenata. Svaki od tih skupova se javlja tačno jednom. Iz formule uključenja i isključenja dobijamo

$$N_n \setminus (A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_m})|$$

$$= n - \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \ldots$$

Matematičkom indukcijom po broju prostih faktora, m, u faktorizaciji broja n pokazujemo da je ovaj broj jednak

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

b) Neka su $p_1, p_2, \ldots, p_s$ zajednički prosti delioci brojeva m i n, a $q_1, q_2, \ldots, q_t$ preostali prosti delioci broja m i $r_1, r_2, \ldots, r_v$ preostali prosti delioci broja n. Tada su $p_1, p_2, \ldots, p_s, q_1, q_2, \ldots, q_t, r_1, r_2, \ldots, r_v$ svi prosti delioci broja mn, pa na osnovu dela pod a) i osobine da je $q^2 \leq q$ za brojeve $0 \leq q \leq 1$ imamo:

$$\begin{aligned}
\varphi(m)\varphi(n) &= mn \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^2 \prod_{j=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) \prod_{k=1}^{v} \left(1 - \frac{1}{r_k}\right) \\
&\leq mn \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \prod_{j=1}^{t} \left(1 - \frac{1}{q_j}\right) \prod_{k=1}^{v} \left(1 - \frac{1}{r_k}\right) \\
&= \varphi(mn),
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Jednakost u $q^2 \leq q$ važi samo za brojeve $q = 0$ i $q = 1$, ali oba ta slučaja otpadaju jer $1 - \dfrac{1}{p}$ ne može biti ni 0 ni 1. Stoga jednakost u traženoj formuli važi samo kad nema članova $p_1, p_2, \ldots, p_s$, odnosno kada su prirodni brojevi m i n uzajamno prosti.

c) Neka je $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$. Traženi rezultat ćemo pokazati indukcijom po zbiru stepena $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$.

Baza indukcije: Ako je $m = 1$ i $k_1 = 1$, tada je n prost i suma na levoj strani postaje $\varphi(1) + \varphi(n) = 1 + (n-1) = n$.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve brojeve kod kojih je $k_1 + k_2 + \ldots + k_m \leq r - 1$.

Indukcijski korak: Pokazaćemo da tvrdjenje važi i za prirodan broj kod koga je $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = r$. Neka je

$$D_1 = \{p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_m^{i_m} \mid 0 \leq i_1 \leq k_1 - 1, 0 \leq i_2 \leq k_2, \ldots, 0 \leq i_m \leq k_m\}$$

i

$$D_2 = \{p_1^{k_1} p_2^{i_2} \ldots p_m^{i_m} \mid 0 \leq i_2 \leq k_2, \ldots, 0 \leq i_m \leq k_m\}$$

razbijanje skupa D delilaca broja n na dva dela. Tada na osnovu induktivne pretpostavke imamo da je

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{d \in D_1} \varphi(d) + \sum_{d \in D_2} \varphi(d) = \frac{n}{p_1} + p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \frac{n}{p_1^{k_1}} = n,$$

gde smo iskoristili da za uzajamno proste brojeve a i b važi $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

83. Označimo sa S_n skup svih permutacija skupa N_n, a sa A_i $(1 \leq i \leq n)$ skup svih permutacija koje imaju i za fiksnu tačku, tj. kod kojih je $\alpha_i = i$. Tada bilo koji presek k takvih skupova ima $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$ elemenata $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n)$, jer su u skupu $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ brojevi $i_1, i_2, \ldots, i_k$ fiksne tačke, a na ostalih $n-k$ mesta može da se pojavi bilo koji od preostalih $n-k$ brojeva. Iz formule uklučenja i isključenja dobijamo da je broj permutacija bez fiksne tačke jednak

$$\begin{aligned} D(n) &= |S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)| \\ &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

84. k fiksnih tačaka mogu se izabrati na $\binom{n}{k}$ načina. Ostalih $n-k$ elemenata permutacije se rasporedjuju na preostalih $n-k$ mesta, tako da nijedan od tih elemenata nije na svom mestu i to možemo učiniti na $D(n-k)$ načina, gde D označava broj permutacija bez fiksne tačke. Stoga, permutacija sa tačno k fiksnih tačaka ima

$$\binom{n}{k} D(n-k) = \frac{n!}{k!} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}\right).$$

85. Rešićemo opštiji problem: Koliko ima permutacija α skupa $N_s = \{1, 2, \ldots, s\}$ takvih da za svaki broj $j \in \{a_1, a_2 \ldots, a_m\} \subseteq N_s$ važi $\alpha(j) \neq j$? Slično kao u zadatku 83 označimo sa A_i $(1 \leq i \leq m)$ skup svih permutacija koje imaju a_i za fiksnu tačku i sličnim zaključivanjem dobijamo da je

$$D(s,m) = s! - \binom{m}{1}(s-1)! + \binom{m}{2}(s-2)! - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}(s-m)!.$$

Sada se vratimo na problem iz zadatka: tu je $s = 2n$, $m = n$ i $\{a_1, a_2 \ldots, a_m\} = \{2, 4 \ldots, 2n\}$, pa je broj permutacija koje nijedan paran broj ne slikaju samog u sebe jednak

$$(2n)! - \binom{n}{1}(2n-1)! + \binom{n}{2}(2n-2)! - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} n!.$$

86. Označimo sa A_i skup rasporeda za okruglim stolom u kojima i-ti bračni par sedi jedan do drugog. Uočimo k parova i razmotrimo rasporede u kojima za svaki od ovih parova važi da muž sedi do žene. Svaki taj par može biti tretiran kao jedna nova osoba i svaka dva mesta koja zauzima neki od tih parova mogu biti uzeti kao jedno novo mesto. Pored toga imamo još $2n - 2k$ osoba i $2n - 2k$ stolica. Dakle, to se svodi na raspored $2n-k$ osoba na $2n-k$ stolica. Kako su stolice označene, broj tih rasporeda jednak je $(2n-k)!$. Ali unutar svakog od tih k parova, možemo zameniti mesta mužu i ženi i oni će ostati susedni. Stoga ima $2^k(2n-k)!$ rasporeda. Kako k parova možemo odabrati na $\binom{n}{k}$ načina, dolazimo do

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \binom{n}{k} 2^k (2n-k)!.$$

Kada to uvrstimo u formulu uključenja-isključenja dobijamo da traženih rasporeda ima

$$(2n)! - \binom{n}{1} 2(2n-1)! + \binom{n}{2} 2^2 (2n-2)! - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 2^n n!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k (2n-k)!.$$

87. a) Označimo sa $S(n,k)$ broj neuredjenih razbijanja n-elementnog skupa na k podskupova (pod terminom razbijanje, podrazumevamo da su podskupovi disjunktni i da je njihova unija jednaka polaznom skupu).

Odredićemo broj uredjenih razbijanja n-elementnog skupa na k podskupova (to je jednako $k!S(n,k)$ jer svakom neuredjenom razbijanju odgovara $k!$ uredjenih koja se dobijaju premeštanjem podskupova) i odatle naći $B_{n,k}$. Svakom uredjenom razbijanju $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ skupa

$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ odgovara funkcija $f : X \to N_k$ data sa $f(a) = j$ ako i samo ako $a \in X_j$. Zbog toga je broj razbijanja n-elementnog skupa na k podskupova jednak broju funkcija $f : X \to N_k$ koje su "na". Označimo skup svih takvih funkcija sa F, sa $\mathcal{F}$ skup svih funkcija $f : X \to N_k$, a sa $F(b)$ skup svih funkija koje ne uzimaju vrednost b, tj. $F(b) = \{f : X \to N_k \mid (\forall a \in X)\ f(a) \neq b\}$, gde je $b \in N_k$. Kako je $|\mathcal{F}| = k^n$ i $|F(b_1) \cap F(b_2) \cap \ldots \cap F(b_j)| = (k-j)^n$ (jer sve te funkcije slikaju $X \to N_k \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_j\}$) iz formule uključenja i isključenja dobijamo da je

$$\begin{aligned} |F| &= |\mathcal{F}| - |F(1) \cup F(2) \cup \ldots \cup F(k)| = k^n - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n \quad \text{(smena } i = k - j\text{)}, \end{aligned}$$

tj. $|F| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$. Odavde dobijamo da je broj neuredjenih razbijanja n-elementnog skupa na k podskupova jednak

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Brojevi $S(n,k)$ se nazivaju *Stirlingovi brojevi druge vrste.*

b) Ukupan broj ekvivalencija na skupu sa n elemenata jednak je zbiru ekvivalencija sa 1 klasom, sa 2 klase, ..., sa n klasa:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

c) Ekvivalencije na skupu od $n+1$ elemenata možemo prebrojati na sledeći način: element a_{n+1} može pripadati klasi ekvivalencije koja, pored a_{n+1}, ima još $k = 0, 1, \ldots, n$ elemenata. Ta klasa ekvivalencije može se odrediti na $\binom{n}{k}$ načina: biramo k elemenata skupa $X \setminus \{a_{n+1}\}$, dok se ostalih $n - k$ elemenata nalazi u preostalim klasama ekvivalencije. Oni se mogu rasporediti na B_{n-k} načina, što nam sa smenom $i = n - k$ daje:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

d) B_n možemo predstaviti u obliku

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) = \sum_{k=1}^{\infty} S(n,k),$$

jer je $S(n,k)=0$ za $k>n$ (n-elementni skup je nemoguće podeliti na $k>n$ klasa ekvivalencije!). Korišćenjem formule pokazane u delu pod a) i zamenom redosleda sumiranja dobijamo:

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^{\infty} S(n,k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i^n \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} i^n \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k-i} \frac{k!}{i!(k-i)!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{i!} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} = \frac{1}{e} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{i!}, \end{aligned}$$

gde smo iskoristili činjenicu da je $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ (videti sledeću glavu o funkcijama generatrise).

88. (a) $(1-2x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-2}{n} (-2x)^n = \sum_{n\geq 0} (n+1) 2^n x^n.$

Dakle, koeficijent uz x^5 je $c_5 = 6 \cdot 2^5$.

(b) Kako je $(1+x)^{\frac{1}{3}} = \sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{3}}{n} x^n$, to dobijamo da je koeficijent uz x^4 jednak

$$c_4 = \binom{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{4!} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)$$

(c) $\dfrac{(2+x)^{\frac{3}{2}}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} 2^{\frac{3}{2}} \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) \left(\sum_{n\geq 0} \binom{\frac{3}{2}}{n} \dfrac{x^n}{2^n}\right) =$

$2\sqrt{2}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\left(\binom{\frac{3}{2}}{0} + \binom{\frac{3}{2}}{1}\frac{x}{2} + \binom{\frac{3}{2}}{2}\frac{x^2}{4} + \binom{\frac{3}{2}}{3}\frac{x^3}{8} + \cdots\right)$

Odavde zaključujemo da je koeficijent uz x^3 jednak

$$c_3 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}\binom{\frac{3}{2}}{3} + \frac{1}{4}\binom{\frac{3}{2}}{2} + \frac{1}{2}\binom{\frac{3}{2}}{1} + \binom{\frac{3}{2}}{0}\right)$$

(d) Kako je

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right), \end{aligned}$$

to zaključujemo da početni izraz može da se predstavi u obliku :

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{1}{1-x^3}\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\right) \\
= & \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} x^{3n}\right)\left(\sum_{n\geq 0} x^{2n}+\sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}(-x)^n\right) \\
= & \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} x^{3n}\right)\left(\sum_{n\geq 0} x^{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} x^{3n}\right)\left(\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n\right)
\end{aligned}
$$

Poslednji izraz je oblika :

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots) \\
+ & \frac{1}{2}(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+2x+3x^3+4x^3+5x^4+\cdots)
\end{aligned}
$$

U prvom delu izraza, x^9 dobijamo kao proizvod slobodnog člana i x^9, kao i x^3 i x^6. U drugom delu izraza, x^9 dobijamo u tri slučaja - slobodan član i x^9, $4x^3$ i x^6, $7x^6$ i x^3.
Na osnovu toga zaključujemo da je traženi koeficijent

$$c_9 = \frac{1}{2}((1+1)+(1+4+7)) = 7$$

89. (a) Imamo da je

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} &= \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-ax}-\frac{b}{1-bx}\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(a\sum_{n\geq 0}(ax)^n - b\sum_{n\geq 0}(bx)^n\right) \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n\geq 0}(a^{n+1}-b^{n+1})x^n\right)
\end{aligned}
$$

Na osnovu dobijenog izraza zaključujemo da je koeficijent uz x^n jednak

$$c_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

(b) Posle rastavljanja na činioce dobijamo

$$\frac{1}{1-6x_1 1x^2-6x^3} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}.$$

Kako je $\dfrac{1}{(1-2x)(1-3x)} = \dfrac{3}{1-3x} - \dfrac{2}{1-2x} = 3\sum_{n\geq 0} 3^n x^n - 2\sum_{n\geq 0} 2^n x^n = \sum_{n\geq 0}(3^{n+1}-2^{n+1})x^n$, dobijamo

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} = \left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}(3^{n+1}-2^{n+1})x^n\right)$$

Konačno zaključujemo da je koeficijent uz x^n

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}(3^{k+1}-2^{k+1})$$

(c) $\dfrac{1}{(1-x^2)^2} = (1-x^2)^{-2} = \sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^{2n}$, pa je koeficijent uz x^n

$$c_n = \begin{cases} k+1 & , \quad n = 2k \\ 0 & , \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

(d) $\dfrac{1-x-x^2}{(1-2x)(1-x)^2} = \dfrac{1-2x+x(1-x)}{(1-2x)(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{x}{(1-2x)(1-x)}$

Sada rastavljamo posebno svaki od sabiraka.

$(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}(-x)^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$

$\dfrac{x}{(1-2x)(1-x)} = x\left(\dfrac{2}{1-2x} - \dfrac{1}{1-x}\right) = x\sum_{n\geq 0}(2^{n+1}-1)x^n$

Koeficijent uz x^n u prvom sabirku je $n+1$, a u drugom 2^n-1, pa je traženi koeficijent

$$c_n = n + 2^n$$

90. Označimo sa $f(x)$ funkciju generatrise niza $f_n = 1, n \in \mathbf{N}_0$. Poznato nam je da je $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

(a) Primenjujući pravilo izvoda na funkciju generatrise $f(x)$ dobijamo da je $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ funkcija generatrise niza $(1,2,3,4,\ldots)$, tj. $b_n = n+1$. Odatle zaključujemo da je

$$a(x) = xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

tražena funkcija generatrise.

(b) Funkcija generatrise niza $a_n = \alpha n + \beta$ je $a(x) = \sum_{n\geq 0}(\alpha n + \beta)x^n = \alpha \sum_{n\geq 0} nx^n + \beta \sum_{n\geq 0} x^n = \alpha g(x) + \beta f(x)$, gde je $g(x)$ funkcija generatrise niza $g_n = n+1$, a $f(x)$ funkcija generatrise niza $f_n = 1$. Iz dela pod (a) dobijamo da je

$$a(x) = \alpha \frac{x}{(1-x)^2} + \beta \frac{1}{1-x} = \frac{\beta + \alpha x - \beta x}{(1-x)^2}$$

(c) $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ je (na osnovu dela (b)) funkcija generatrise niza $f'_n = n+1$. Na osnovu toga, dobijamo da je $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$ funkcija generatrise niza $f''_n = (n+2)(n+1)$. Kako je $(n+2)(n+1) - (n+1) = (n+1)^2$, dobijamo da je funkcija generatrise niza $a_n = n^2$ jednaka

$$a(x) = x(f''(x) - f'(x)) = \frac{x(1-2x)}{(1-x)^3}$$

(d) Na osnovu delova (a), (b) i (c), kao i osobina funkcija generatrise, dobijamo da je

$$a(x) = \alpha \frac{x(1-2x)}{(1-x)^3} + \beta \frac{x}{(1-x)^2} + \gamma \frac{1}{1-x}$$

(e) Funkcija generatrise niza a_n je

$$a(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} (3x)^n = \frac{1}{1-3x}$$

(f) Slično kao i u prethodnim slučajevima dobijamo

$$a(x) = \frac{5}{1-7x} - \frac{3}{1-4x}$$

91. (a) Kako je $f(x) = \frac{1}{1-x}$ fukcija generatrise niza $(1, 1, 1, 1, \ldots)$, to je $f(x^3)$ funkcija generatrise niza $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots)$, pa je $\frac{f(x^3)-1}{x}$ funkcija generatrise niza $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots)$. Konačno, tražena funkcija generatrise je

$$a(x) = f(x) - \frac{f(x^3) - 1}{x}$$

(b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ je fukcija generatrise niza $(1, 1, 1, 1, \ldots)$. Korišćenjem operacija za rad sa funkcijama generatrise, dobijamo da je $f(2x)$ funkcija generatrise niza $(1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots)$, a $g(x) = \frac{f(x)-1}{x}$ funkcija generatrise niza $(2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots)$. Dalje su $g(x^3)$,$xg(x^3)$ i $x^2 g(x^3)$, redom, funkcije generatrise nizova $(2, 0, 0, 4, 0, 0, 8, 0, 0, \ldots)$,

$(0,2,0,0,4,0,0,8,0,\dots)$ i $(0,0,2,0,0,4,0,0,8\dots)$. Kako sabiranjem ova tri niza dobijamo dati niz, to je njegova funkcija generatrise

$$F(x) = (1+x+x^2)g(x) = (1+x+x^2)\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \frac{1+x+x^2}{1-x}$$

(c) $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+5)!}x^n = \frac{1}{x^5}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+5}}{(n+5)!} = \frac{1}{x^5}\left(e^x - \sum_{i=0}^{4}\frac{x^i}{i!}\right)$

(d) $f(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n+1}{n!}x^n = 1+3x+\sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)+2n+1}{n!}x^n = 1+3x+\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{(n-2)!}+2\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{(n-1)!}+\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n!} = 1+3x+x^2e^x+2x(e^x-1)+e^x = 1+x+e^x(1+x)^2$

Označimo sa $A = \sum_n \binom{m}{2n}x^{2n}$ i $B = \sum_n \binom{m}{2n+1}x^{2n+1}$. Korišćenjem binomne teoreme, vidi se da je

$$\begin{aligned} A+B &= \sum_n \binom{m}{n}x^n = (1+x)^m, \\ A-B &= \sum_n \binom{m}{n}(-1)^n x^n = (1-x)^m, \end{aligned}$$

odakle se dobijaju sledeće vrednosti

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left((1+x)^m + (1-x)^m\right), \\ B &= \frac{1}{2}\left((1+x)^m - (1-x)^m\right). \end{aligned}$$

93. Označimo sa $A = \sum_n \binom{2n}{m}x^{2n}$ i $B = \sum_n \binom{2n+1}{m}x^{2n+1}$. Korišćenjem funkcije generatrise $\sum_n \binom{n}{m} x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$ vidi se da je

$$\begin{aligned} A+B &= \sum_n \binom{n}{m}x^n = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}, \\ A-B &= \sum_n \binom{n}{m}(-1)^n x^n = \frac{(-1)^m x^m}{(1+x)^{m+1}}, \end{aligned}$$

odakle se dobijaju sledeće vrednosti

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}}\right), \\ B &= \frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}}\right). \end{aligned}$$

94. Traženi broj uredjenih trojki jednak je koeficijentu uz x^n u polinomu

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)$$

(ovde treba obratiti pažnju na to da je $k \geq 1$). Dakle, tražena funkcija generatrise je

$$f(x) = (\sum_{k\geq 0} x^k)(\sum_{k\geq 0} x^{3k})x^5(\sum_{k\geq 0} x^{5k}) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{x^5}{1-x^5}$$

95. Tražimo sve brojeve oblika $k = \overline{c_{m-1}c_{m-2}\ldots c_1c_0}$, za koje je $c_0+c_1+\cdots+c_{m-1}=n$, gde su c_i cifre. Ukupan broj takvih brojeva jednak je koeficijentu uz x^n u polinomu $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^9)^m$. Dakle, tražena funkcija generatrise je $f(x) = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^m$.

96. (a) Posmatramo nizove $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ i $(1,1,1,\ldots)$, čije su funkcije generatrise, redom, $f(x)$ i $\frac{1}{1-x}$. Njihov proizvod je, na osnovu definicije proizvoda, niz $(S_a)_n$, a funkcija generatrise proizvoda je proizvod funkcija generatrise, tj. $\frac{f(x)}{1-x}$.

(b) Na osnovu dela (a), dovoljno je naći funkciju generatrise niza $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$.

Kako je $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$, to je $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Dakle, $-ln(1-x)$ je funkcija generatrise niza $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$. Odatle zaključujemo da je $f(x) = -\frac{ln(1-x)}{x}$ funkcija generatrise niza $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$, pa je funkcija generatrise niza H_n

$$H(x) = \frac{f(x)}{1-x} = -\frac{ln(1-x)}{x(1-x)}$$

(c) Na osnovu dela (a), očigledno je $S^r(x) = \frac{f(x)}{(1-x)^r}$.

(d) Na osnovu dela (c), imamo da je

$$S^r(x) = \frac{f(x)}{(1-x)^r} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (1-x)^r.$$

Sada lako dobijamo da je početni niz $a_n = (-1)^n\binom{r}{n}$.

97. a) Jednačini $a_{n+1} = 3a_n + 2$ odgovara jednačina

$$\frac{A(x)-a_0}{x} = 3A(x) + \frac{2}{1-x}$$

sa funkcijama generatrise: izraz na levoj strani, $\dfrac{A(x)-a_0}{x}$, odgovara nizu pomerenom za jedan ulevo tako da je njegov n-ti član razvoja jednak

a_{n+1}; n-ti član od $3A(x)$ je $3a_n$; dok je svaki (pa i n-ti član) razvoja $\frac{2}{1-x}$ jednak 2. Jednačini $a_{n+1} = 3a_n + 2$ sa početnim uslovom $a_0 = 0$ odgovara jednačina $\frac{A(x)}{x} = 3A(x) + \frac{2}{1-x}$, što kad sredimo dobijamo $A(x)(1-3x) = \frac{2}{1-x}$. Odatle nalazimo traženu funkciju generatrise niza $(a_n)_{n\geq 0}$:

$$A(x) = \frac{2x}{(1-3x)(1-x)}.$$

Funkciju generatrise niza ćemo predstaviti u pogodnijem obliku za traženje niza (racionalnu funkciju predstavimo u obliku zbira parcijalnih razlomaka) i zatim iskoristimo poznate funkcije generatrise iz prethodnog poglavlja:

$$A(x) = \frac{2x}{(1-3x)(1-x)} = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-x}.$$

Iz funkcije generatrise lako nalazimo i opšti član niza:

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0}(3x)^n - \sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0}(3^n - 1)x^n$$

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \;\Rightarrow\; a_n = 3^n - 1.$$

b) Jednačini $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ sa početnim uslovima $a_0 = 1, a_1 = 2$ odgovaraju funkcije generatrise:

$$\frac{A(x) - 1 - 2x}{x^2} = 2\frac{A(x) - 1}{x} - A(x).$$

Kada ovo sredimo, dobija se

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = -\sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0}\binom{n+1}{n}x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1+n+1)x^n = \sum_{n\geq 0} n x^n \;\Rightarrow\; a_n = n. \end{aligned}$$

c) Jednačini $a_{n+2} = -4a_{n+1} - 8a_n$ sa početnim uslovima $a_0 = 0, a_1 = 2$ odgovaraju funkcije generatrise:

$$\frac{A(x) - 0 - 2x}{x^2} = -4\frac{A(x) - 0}{x} - 8A(x).$$

Kada ovo sredimo, dobija se

$$A(x) = \frac{2x}{1+4x+8x^2}.$$

Ponovićemo postupak iz prethodna dva dela, samo je sada račun komplikovaniji jer su rešenja kvadratne jednačine $x^2+4x+8=0$ (primetimo da ovo nije imenilac razlomka, nego "obrnut" polinom!) kompleksni brojevi $x_1 = -2+2i$ i $x_2 = -2-2i$. Funkciju generatrise opet predstavljamo kao zbir dva razlomka (sada nisu parcijalni, jer se javljaju kompleksni brojevi!):

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{2x}{1+4x+8x^2} = \frac{B}{1-(-2+2i)x} + \frac{C}{1-(-2-2i)x} \\ &= \frac{B(1-(-2-2i)x) + C(1-(-2+2i)x)}{(1-(-2+2i)x)(1-(-2-2i)x)} \\ &= \frac{(B+C) + ((2+2i)B + (2-2i)C)x}{1+4x+8x^2}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem leve i desne strane dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcl} B & + & C & = & 0 \\ (2+2i)B & + & (2-2i)C & = & 2 \end{array},$$

čija su rešenja $B = \frac{-i}{2}$, $C = \frac{i}{2}$. Stoga imamo:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{2x}{1+4x+8x^2} = \frac{-i/2}{1-(-2+2i)x} + \frac{i/2}{1-(-2-2i)x} \\ &= \frac{-i}{2}\sum_{n\geq 0}(-2+2i)^n x^n + \frac{i}{2}\sum_{n\geq 0}(-2-2i)^n x^n. \end{aligned}$$

Odatle dobijamo rešenje

$$a_n = \frac{-i}{2}(-2+2i)^n + \frac{i}{2}(-2-2i)^n,$$

ali da bismo ga još pojednostavili predstavićemo oba ova kompleksna broja koji se stepenuju u trigonometrijskom obliku:

$$\begin{aligned} -2+2i &= 2\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) \\ -2-2i &= 2\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}). \end{aligned}$$

Tada je

$$a_n = \frac{-i}{2}(2\sqrt{2})^n\cdot(\cos\frac{3\pi}{4}n + i\sin\frac{3\pi}{4}n) + \frac{i}{2}(2\sqrt{2})^n\cdot(\cos\frac{3\pi}{4}n - i\sin\frac{3\pi}{4}n),$$

odnosno kad se sredi dobijamo $a_n = (2\sqrt{2})^n \sin\frac{3\pi}{4}n$.

Ovo rešenje se korišćenjem trigonometrije može razbiti na slučajeve:

$$\begin{array}{ll}
a_n = 0 & \text{kada je } n = 8k, \\
a_n = (2\sqrt{2})^n & \text{kada je } n = 8k+6, \\
a_n = -(2\sqrt{2})^n & \text{kada je } n = 8k+2, \\
a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n & \text{kada je } n = 8k+1 \text{ ili } n = 8k+3, \\
a_n = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n & \text{kada je } n = 8k+5 \text{ ili } n = 8k+7.
\end{array}$$

d) Jednačini $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$ sa početnim uslovima $a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = -2$ odgovara:

$$\frac{A(x) - 2 - 0 \cdot x - (-2)x^2}{x^3} = 6\frac{A(x) - 2 - 0 \cdot x}{x^2} - 11\frac{A(x) - 2}{x} + 6A(x).$$

Kada ovo sredimo, dobija se

$$A(x) = \frac{20x^2 - 12x + 2}{1 - 6x + 11x^2 - 6x^3}.$$

Funkciju generatrise predstavljamo kao zbir tri razlomka:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{20x^2 - 12x + 2}{1 - 6x + 11x^2 - 6x^3} = \frac{20x^2 - 12x + 2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} \\
&= \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x}.
\end{aligned}$$

Kada sve pomnožimo sa imeniocem dobijamo jednačinu $20x^2 - 12x + 2 = B(1-5x+6x^2)+C(1-4x+3x^2)+D(1-3x+2x^2)$, od koje izjednačavanjem leve i desne strane dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr}
B & + & C & + & D & = & 2 \\
-5B & - & 4C & - & 3D & = & -12 \\
6B & + & 3C & + & 2D & = & 20
\end{array},$$

čija su rešenja $B = 5$, $C = -4$, $D = 1$. Stoga imamo:

$$A(x) = \frac{5}{1-x} - \frac{4}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = 5\sum_{n\geq 0} x^n - 4\sum_{n\geq 0}(2x)^n + \sum_{n\geq 0}(3x)^n$$

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \sum_{n\geq 0}(5 - 4 \cdot 2^n + 3^n)x^n.$$

Odatle dobijamo rešenje $a_n = 5 - 4 \cdot 2^n + 3^n = 5 - 2^{n+2} + 3^n$.

98. Iz smene $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = z_n - b$ dobijamo

$$z_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} + b$$

(i $z_{n+1} = \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} + b$), što kad uvrstimo u rekurentnu jednačinu dobijamo

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} + b = \frac{u_{n+1}u_n + b - a}{u_{n+1}u_n} = \frac{u_{n+1} + u_n(b-a)}{u_{n+1}}.$$

Kad ovu jednačinu pomnožimo sa u_{n+1} i sredimo dobijamo traženu jednačinu

$$u_{n+2} + (b-1)u_{n+1} + (a-b)u_n = 0.$$

Za $a = 0$ i $b = 2$ to je

$$u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

Karakteristična jednačina je $t^2+t-2 = 0$ i njeni koreni su $t_1 = 1$ i $t_2 = -2$. Stoga je opšte rešenje ove rekurentne jednačine oblika

$$u_n = C_1 + C_2 \cdot (-2)^n,$$

gde su C_1 i C_2 konstante koje se odredjuju iz početnih uslova. Kako smo uveli smenu $z_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} + 2$ i na početku smo imali $z_0 = 1$, najpogodnije je uzeti $u_0 = 1$ (odredjivanjem vrednosti u_0 dobijamo sve ostale vrednosti niza (u_n) iz poznatog niza (z_n)!), jer je tada $u_1 = z_0 - 2 = -1$. Rešavanjem sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} C_1 & + & C_2 & = & u_0 & = & 1 \\ C_1 & - & 2C_2 & = & u_1 & = & -1 \end{array}$$

dobijamo $C_1 = \dfrac{1}{3}$ i $C_2 = \dfrac{2}{3}$.

$$u_n = \frac{1 + 2\cdot(-2)^n}{3},$$

što kad uvrstimo u z_n dobijamo:

$$z_n = \frac{1 + 2\cdot(-2)^{n+1}}{1 + 2\cdot(-2)^n} + 2 = \frac{1 + 2\cdot(-2)^{n+1} + 2 + 4\cdot(-2)^n}{1 + 2\cdot(-2)^n},$$

odnosno $z_n = \dfrac{3}{1 + 2(-2)^n}$.

99. Kada izjednačimo matrice na levoj i desnoj strani polazne matrične jednačine,

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n + w_n \\ v_n + w_n \\ u_n - v_n + 4w_n \end{bmatrix},$$

dobijamo sistem rekurentnih jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & u_n & & & + & w_n \\ v_{n+1} & = & & & v_n & + & w_n \\ w_{n+1} & = & u_n & - & v_n & + & 4w_n \end{array}.$$

Da bismo dobili rekurentnu relaciju samo po u treba "eliminisati" i v i w. Iz prve jednačine imamo

$$w_n = u_{n+1} - u_n,$$

što kada ubacimo u treću dobijamo: $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n - v_n + 4u_{n+1} - 4u_n$, a odavde

$$v_n = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n.$$

Kada u drugu ubacimo izraze za v i w preko u dobijamo traženu homogenu linearnu rekurentnu relaciju:

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} - 4u_n = 0.$$

Karakteristična jednačina je $t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$, odnosno $(t-1)^2(t-4) = 0$. Njeni koreni su $t_1 = t_2 = 1$ i $t_3 = 4$, pa je opšte rešenje oblika

$$u_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n + c_3 \cdot 4^n,$$

gde konstante C_1, C_2 i C_3 tražimo iz početnih uslova ($u_0 = 1$, $u_1 = u_0 + w_0 = 2$ i $u_2 = u_1 + w_1 = u_1 + (u_0 - v_0 + 4w_0) = 6$). Kada rešimo sistem

$$\begin{array}{ccccccccc} u_0 & = & 1 & = & C_1 & & & + & C_3 \\ u_1 & = & 2 & = & C_1 & + & C_2 & + & 4C_3 \\ u_2 & = & 6 & = & C_1 & + & 2C_2 & + & 16C_3 \end{array}$$

dobijamo $C_1 = \dfrac{2}{3}$, $C_2 = 0$ i $C_3 = \dfrac{1}{3}$. Opšta formula za u_n je

$$u_n = \frac{2 + 4^n}{3}.$$

Napomena: Da smo sistem rekurentnih jednačina "prebacili" na funkcije generatrisa, dobili bi sistem jednačina po $U(x)$, $V(x)$ i $W(x)$, čijim rešavanjem dobijamo:

$$U(x) = \frac{1 - 3x}{4x^2 - 5x + 1}.$$

Odatle, takodje, dobijamo da je

$$u_n = \frac{2 + 4^n}{3},$$

ali dobijamo jednostavniju linearnu rekurentnu vezu:

$$u(n+2) - 5u(n+1) + 4u(n) = 0.$$

Ovo je posledica toga što funkcija generatrise sadrži potpunu informaciju o nizu (i početne uslove, koje smo u prethodnom razmatranju uzimali tek na kraju, a oni su "krivci" za to pojednostavljenje jer je

$$u(n) = \frac{u(0) - v(0) + 3w(0)}{9} 4^n + \frac{v(0) + 8u(0) - 3w(0)}{9} + \frac{v(0) - u(0)}{3} n$$

i za $u(0) - v(0) + 3w(0) \neq 0$ i $v(0) - u(0) \neq 0$ dobija se rekurentna veza $u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} - 4u_n = 0$, a ako je neki od tih izraza jednak nuli dobijamo jednostavniju rekurentnu vezu).

100. Karakteristična jednačina je $t^2 - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ i njeni koreni su $t_1 = 1$ i $t_2 = -\frac{1}{2}$. Stoga je opšte rešenje

$$a_n = C_1 + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Iz početnih uslova $C_1 + C_2 = a_0$ i $C_1 - \dfrac{1}{2}C_2 = u_1$ nalazimo da je $C_1 = \dfrac{a_0 + 2a_1}{3}$, $C_2 = \dfrac{2a_0 - 2a_1}{3}$ i

$$a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3} + \frac{2a_0 - 2a_1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ dobijamo da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{a_0 + 2a_1}{3}$.

101. Označimo sa p_n broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d, koje sadrže paran broj slova b. Tada je $p_n + q_n = 4^n$ (sve reči dužine n). Reč dužine $n+1$ sa neparnim brojem slova b može se dobiti od reči dužine n sa neparnim brojem slova b ako joj se na kraj dopiše jedno od tri slova a, c ili d, kao i od reči dužine n sa parnim brojem slova b ako joj se na kraj dopiše slovo b: $q_{n+1} = 3 \cdot q_n + p_n$. U ovom sistemu,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} p_n & + & q_n & = & 4^n & & \\ & & q_{n+1} & = & 3q_n & + & p_n, \end{array}$$

ako iz prve jednačine izrazimo $p_n = 4^n - q^n$ i to ubacimo u drugu dobijamo nehomogenu linearnu rekurentnu jednačinu

$$q_{n+1} = 2q_n + 4^n.$$

Da je $q_0 = 0$ možemo dobiti iz $q_1 = 2q_0 + 4^0$ ($q_1 = 1$: samo reč b). Ako sad predjemo na funkcije generatrise dobijamo:

$$\frac{Q(x) - 0}{x} = 2Q(x) + \frac{1}{1-4x},$$

što kad sredimo daje

$$Q(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-4x)}.$$

Predstavimo $Q(x)$ u pogodnijem obliku:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1/2}{1-4x} - \frac{1/2}{1-2x} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(4x)^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(2x)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{4^n - 2^n}{2} x^n. \end{aligned}$$

Odatle dobijamo rešenje $\quad a_n = \dfrac{1}{2}(4^n - 2^n)$.

102. a) Napišimo jednačinu sa indeksima za jedan većim ($n \to n+1$):

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + 4x_{n+1} = 2^{n+1}$$

i od nje oduzmimo dvostruku polaznu jednačinu. Na taj način smo eliminisali nehomogeni deo i dobili smo jednačinu

$$x_{n+3} - 6x_{n+2} + 12x_{n+1} - 8x_n = 0.$$

Karakteristična jednačina je $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$ i njeni koreni su $t_1 = t_2 = t_3 = 2$, pa je opšte rešenje oblika

$$x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 n^2 2^n.$$

Nepoznate konstante nalazimo iz početnih uslova ($x_0 = x_1 = 0$, a iz polazne jednačine, za $n = 0$, dobijamo $x_2 = 1$): $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{8}$, $C_3 = \dfrac{1}{8}$. Opšte rešenje je

$$x_n = n(n-1)2^{n-3}.$$

b) Na isti način kao u delu pod a) dolazimo do homogene linearne rekurentne jednačine

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - 2x_n = 0.$$

Karakteristična jednačina je $t^3 - 3t^2 + 3t - 2 = 0$ i njeni koreni su $t_1 = 2$, $t_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot (\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$, $t_3 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot (\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3})$, pa je opšte rešenje oblika

$$x_n = C_1 2^n + C_2 \cos(\frac{\pi}{3}n) + C_3 \sin(\frac{\pi}{3}n).$$

Iz $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$ dobijamo $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Opšte rešenje je

$$x_n = 2^n + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{n\pi}{3}.$$

Drugačije zapisan ovaj niz je jednak

$$x_n = \begin{cases} 2^n & n = 3k \\ 2^n + 1 & n = 6k+1, n = 6k+2 \\ 2^n - 1 & n = 6k+4, n = 6k+5 \end{cases}.$$

c) Eksponencijalni član, 2^n, eliminišemo ako od pomerene jednačine oduzmemo polaznu:

$$x_{n+3} - 8x_{n+2} + 21x_{n+1} - 18x_n = 1 - n.$$

Član n eliminišemo ako ovu jednačinu oduzmemo od njoj pomerene:

$$x_{n+4} - 9x_{n+3} + 29x_{n+2} - 39x_{n+1} + 18x_n = -1.$$

Član -1 eliminišemo ako ovu jednačinu oduzmemo od njoj pomerene:

$$x_{n+5} - 10x_{n+4} + 38x_{n+3} - 68x_{n+2} + 57x_{n+1} - 18x_n = 0.$$

Karakteristična jednačina je $t^5 - 10t^4 + 38t^3 - 68t^2 + 57t - 18 = 0$ i njeni koreni su $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 2$ (ove korene smo mogli da očekujemo zbog postupka kojim smo eliminisali nehomogeni deo!) i $t_4 = t_5 = 3$, pa je opšte rešenje oblika

$$x_n = C_1 + C_2 n + C_3 2^n + C_4 3^n + C_5 n 3^n.$$

Iz $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$, $x_3 = 9$, $x_4 = 51$ dobijamo $C_1 = C_2 = \frac{1}{4}$, $C_3 = 1$, $C_4 = -\frac{5}{4}$, $C_5 = \frac{5}{12}$. Opšte rešenje je

$$x_n = \frac{1 + n + 2^{n+2} + 5 \cdot 3^{n-1}(n-3)}{3}.$$

Napomena: Zadatak je bilo moguće rešiti i pomoću funkcija generatrisa i tada bi dobili a) $X(t) = \frac{t^2}{(1-2t)^3} = \frac{1/4}{1-2t} - \frac{1/2}{(1-2t)^2} + \frac{1/4}{(1-2t)^3}$; b) $X(t) = \frac{1-t^2}{(1-2t)(1-t+t^2)}$; c) $X(t) = \frac{t^2 - t^3 - t^4}{(1-t)^2(1-2t)(1-3t)^2} = \frac{1/4}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-2t} - \frac{5/3}{1-3t} + \frac{5/12}{(1-3t)^2}$.

103. Napišimo rekurentnu jednačinu za a_{n+1}:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = a_n + a_n = 2a_n$$

za $n > 0$ i $a_1 = a_0$ (za $n = 0$). Uz pomoć principa matematičke indukcije dobijamo da je

$$a_n = 2^{n-1}$$

za $n \geq 1$ i $a_0 = 1$.

104. Označimo sa x_n broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d u kojima slova a i b nisu susedna i koje se završavaju slovom a ili b, a sa y_n broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d u kojima slova a i b nisu susedna i koje se završavaju slovom c ili d. Tada imamo sistem rekurentnih jednačina:

$$\begin{array}{rcrcl} x_n &=& x_{n-1} &+& 2y_{n-1} \\ y_n &=& 2x_{n-1} &+& 2y_{n-1} \end{array}.$$

Iz prve jednačine dobijamo $y_n = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{2}$, što kad ubacimo u drugu dobijamo homogenu linearnu rekurentnu jednačinu

$$x_{n+1} - 3x_n - 2x_{n-1} = 0.$$

Njena karakteristična jednačina $t^2 - 3t - 2 = 0$, zajedno sa početnim uslovima $x_1 = 2$ i $x_2 = 6$ (ili lakše za rad, ako iskoristimo rekurentnu vezu i dobijemo $x_0 = 0$) daje opšte rešenje

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$

Kako je $y_n = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{2}$ dobijamo

$$y_n = \frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$

Stoga je traženi broj reči jednak

$$x_n + y_n = \frac{\sqrt{17}+5}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{17}-5}{2\sqrt{17}}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$

Napomena: Zadatak je bilo moguće rešiti i pomoću funkcija generatrisa i tada bi dobili

$$X(t) = \frac{2t}{1-3t-2t^2}, \qquad Y(t) = \frac{1-t}{1-3t-2t^2},$$

$$X(t) + Y(t) = \frac{1+t}{1-3t-2t^2}.$$

105. a) Permutaciji p pridružimo permutaciju r za koju je

$$q(i) = p(n+1-i).$$

Ovakvo pridruživanje je očigledno jednoznačno. Ako je broj rastućih segmenata u p jednak k, onda je broj rastućih segmenata u r jednak $n+1-k$ (ako je u permutaciji p broj elemenata u i-tom rastućem segmentu b_i, onda će u obrnutoj permutaciji r taj segment dati $b_i - 1$ rastućih segmenata, jer prvi element i-tog i poslednji element $(i-1)$-og segmenta daju u r jedan rastući segment. Ovo, naravno, ne važi jedino za prvi rastući segment, pa je ukupan broj rastućih segmenata u r jednak $b_1 + b_2 - 1 + \cdots + b_k - 1 = n + k - 1$). Odatle je jasno da je

$$f(n,k) = f(n, n+1-k).$$

Kako, na osnovu prethodnog, svakoj permutaciji sa k rastućih segmenata odgovara permutacija sa $n+1-k$ rastućih segmenata direktno dobijamo da je prosečan broj rastućih segmenata jednak

$$\frac{k+(n+1-k)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

b) Posmatrajmo proizvoljnu permutaciju p brojeva $1,\dots,n-1$ sa k segmenata. Od nje možemo da dobijemo permutaciju q brojeva $1,\dots,n$ sa k segmenata, dodavanjem elementa n u p na kraj nekog od rastućih segmenata (kojih ima k). Znači na taj način možemo dobiti $k\cdot f(n-1,k)$ permutacija sa k segmenata brojeva $1,\dots,n$. Drugi način da dobijemo permutaciju sa k segmenata brojeva $1,\dots,n$ je da krenemo od permutacije r brojeva $1,\dots,n$ sa $k-1$ segmenata i da ubacimo broj n "unutar" nekog segmenta (pod "unutar" podrazumevamo da nije na kraju nekog segmenta). Takvih mesta ima $n-(k-1)=n+1-k$ jer ukupno ima n mesta gde n možemo da ubacimo u permutaciju brojeva $1,\dots,n-1$ od kojih je $k-1$ na kraju nekog od rastićih segmenata. Kako se permutacija brojeva $1,\dots,n$ sa k segmenata može dobiti samo na ova dva načina i ne možemo dobiti dva puta istu permutaciju (ako bi bilo moguće onda bi izbacivanjem broja n iz te permutacije dobili i permutaciju sa k i permutaciju sa $k-1$ ciklusa!), dobijamo da je ukupan njihov broj permutacija brojeva $1,\dots,n$ sa k segmenata jednak

$$f(n,k)=k\cdot f(n-1,k)+(n+1-k)\cdot f(n-1,k-1),$$

što je i trebalo pokazati.

c) $f(n,1)=1$ jer je jedina permutacija koja ima 1 rastući segment identična permutacija.

Za one sa dva rastuća segmenta važi:

$$f(n,2)=2\cdot f(n-1,2)+(n-1)\cdot f(n-1,1),$$

$$\text{tj.}\quad f(n,2)=2f(n-1,2)+n-1.$$

Ako svako n zamenimo sa $n-1$ u prethodnoj jednakosti dobijamo

$$f(n-1,2)=2f(n-2,2)+n-2.$$

Oduzimanjem ove jednakosti od prethodne dobijamo

$$f(n,2)=3f(n-1,2)-2f(n-2,2)+1$$

(izbacili smo n i treba još da se rešimo jedinice!): od ove jednačine kada oduzmemo

$$f(n-1,2)=3f(n-2,2)-2f(n-3,2)+1 \qquad (n\to n-1)$$

dobijamo linearnu rekurentnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$f(n,2) = 4f(n-1,2) - 5f(n-2,2) + 2f(n-3,2).$$

Njena karakteristična jednačina je $t^3 = 4t^2 - 5t + 2$ i ima korene $t_1 = t_2 = 1$ i $t_3 = 2$. Stoga opšte rešenje tražimo u obliku

$$f(n,2) = c_1 + c_2 n + c_3 2^n.$$

Iz početnih uslova (koje dobijamo korišćenjem formule iz dela pod b): $f(1,2) = 0, f(2,2) = 1, f(3,2) = 4 \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccccc} f(1,2) & = & 0 & = & c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 \\ f(2,2) & = & 1 & = & c_1 & + & 2c_2 & + & 4c_3 \\ f(3,2) & = & 4 & = & c_1 & + & 3c_2 & + & 8c_3 \end{array} .$$

Rešenje ovog sistema je $c_1 = c_2 = -1, c_3 = 1$, što daje

$$f(n,2) = 2^n - n - 1.$$

Za one sa tri rastuća segmenta važi:

$$\begin{aligned} f(n,3) &= 3 \cdot f(n-1,3) + (n-2) \cdot f(n-1,2) \\ &= 3f(n-1,3) + (n-2)(2^{n-1} - (n-1) - 1) \\ &= 3f(n-1,3) + n2^{n-1} - 2^n - n^2 + 2n. \end{aligned}$$

Prvo treba da eliminišemo "najkomplikovaniji" član, $n2^{n-1}$, a to ćemo uraditi tako što od ove jednačine oduzmemo dvostruku $(/ \cdot 2)$ pomerenu $(n \to n-1)$

$$f(n-1,3) = 3f(n-2,3) + (n-1)2^{n-2} - 2^{n-1} - (n-1)^2 + 2(n-1)$$

i dobijamo jednačinu:

$$f(n,3) = 5f(n-1,3) - 6f(n-2,3) + 2^{n-1} + n^2 - 6n + 6.$$

Ovde treba da eliminišemo eksponencijalni član 2^{n-1}, što činimo na isti način, oduzimanjem dvostruke analogne jednačine za $n-1$:

$$2f(n-1,3) = 10f(n-2,3) - 12f(n-3,3) + 2^{n-1} + 2(n-1)^2 - 12(n-1) + 6.$$

Tako dolazimo do

$$f(n,3) = 7f(n-1,3) - 16f(n-2,3) + 12f(n-3,3) - n^2 + 10n - 20.$$

Ovde treba da eliminišemo član n^2, što činimo oduzimanjem analogne jednačine za $n-1$:

$$\begin{aligned} f(n-1,3) &= 7f(n-2,3) - 16f(n-3,3) + 12f(n-4,3) - (n-1)^2 \\ &+ 10(n-1) - 20. \end{aligned}$$

Tako dolazimo do

$$f(n,3) = 8f(n-1,3) - 23f(n-2,3) + 28f(n-3,3) - 12f(n-4,3) - 2n + 11.$$

Ovde treba da eliminišemo član $2n$, što činimo oduzimanjem analogne jednačine za $n-1$:

$$\begin{aligned} f(n-1,3) &= 8f(n-2,3) - 23f(n-3,3) + 28f(n-4,3) \\ &- 12f(n-5,3) - 2(n-1) + 11. \end{aligned}$$

Tako dolazimo do

$$\begin{aligned} f(n,3) &= 9f(n-1,3) - 31f(n-2,3) + 51f(n-3,3) - 40f(n-4,3) \\ &+ 12f(n-5,3) - 2. \end{aligned}$$

Ostaje nam da se rešimo još člana -2. Opet oduzmemo analognu jednačinu za $n-1$:

$$\begin{aligned} f(n-1,3) &= 9f(n-2,3) - 31f(n-3,3) + 51f(n-4,3) \\ &- 40f(n-5,3) + 12f(n-6,3) - 2 \end{aligned}$$

i dobijamo linearnu rekurentnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned} f(n,3) &= 10f(n-1,3) - 40f(n-2,3) + 82f(n-3,3) - 91f(n-4,3) \\ &+ 52f(n-5,3) - 12f(n-6,3). \end{aligned}$$

Njena karakteristična jednačina je $t^6 = 10t^5 - 40t^4 + 82t^3 - 91t^2 + 52t - 12$ i ima korene $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, $t_4 = t_5 = 2$ i $t_6 = 3$. Stoga opšte rešenje tražimo u obliku

$$f(n,2) = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4 2^n + c_5 n 2^n + c_6 3^n.$$

Iz početnih uslova dobijamo sistem od šest jednačina sa šest nepoznatih (c_i):

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} f(0,3) = 0 = & c_1 & & & & & + & c_4 & & & + & c_6 \\ f(1,3) = 0 = & c_1 & + & c_2 & + & c_3 & + & 2c_4 & + & 2c_5 & + & 3c_6 \\ f(2,3) = 0 = & c_1 & + & 2c_2 & + & 4c_3 & + & 4c_4 & + & 8c_5 & + & 9c_6 \\ f(3,3) = 1 = & c_1 & + & 3c_2 & + & 9c_3 & + & 8c_4 & + & 24c_5 & + & 27c_6 \\ f(4,3) = 11 = & c_1 & + & 4c_2 & + & 16c_3 & + & 16c_4 & + & 64c_5 & + & 81c_6 \\ f(5,3) = 66 = & c_1 & + & 5c_2 & + & 25c_3 & + & 32c_4 & + & 160c_5 & + & 243c_6 \end{array}$$

Rešenja ovog sistema su $c_1 = 0, c_2 = c_3 = 1/2, c_4 = c_5 = -1, c_6 = 1$, što daje

$$f(n,3) = \frac{n^2+n}{2} - (n+1)2^n + 3^n.$$

Napomena: Još je Ojler pokazao da važi

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} f(n,k) \cdot \binom{x+k-1}{n} \quad \text{i} \quad f(n,k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (k-i)^n \cdot \binom{n+1}{i}.$$

106. Pomnožimo obe strane jednakosti $f(2n) = f(n)$ sa x^{2n-1} i sumirajmo sve takve jednakosti za $n \geq 1$. Zatim, pomnožimo obe strane jednakosti $f(2n+1) = f(n) + f(n+1)$ sa x^{2n} i sumirajmo sve takve jednakosti za $n \geq 1$. Kad saberemo $f(1) = 1$ i sve to dobijamo:

$$\begin{aligned} f(1) + \sum_{n\geq 1} f(2n)x^{2n-1} &+ \sum_{n\geq 1} f(2n+1)x^{2n} = 1 + \sum_{n\geq 1} f(n)x^{2n-1} + \\ &+ \sum_{n\geq 1} f(n)x^{2n} + \sum_{n\geq 1} f(n+1)x^{2n}, \end{aligned}$$

a to je

$$\sum_{n\geq 1} f(n)x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} f(n)x^{2n-1} + \sum_{n\geq 1} f(n)x^{2n} + 1 + \sum_{n\geq 1} f(n+1)x^{2n},$$

odnosno $F(x) = x^2F(x^2) + xF(x^2) + F(x^2)$. Time smo pokazali traženu jednakost

$$F(x) = (1 + x + x^2)F(x^2).$$

107. a) *I način:* Predstavimo rekurentnu jednačinu preko funkcija generatrisa:

$$\frac{A(x) - r - sx}{x^2} = \frac{A(x) - r}{x} + A(x).$$

Odatle dobijamo da je

$$\begin{aligned} A(x) &= s \cdot \frac{x}{1 - x - x^2} + r \cdot \frac{1 - x}{1 - x - x^2} \\ &= s \cdot \frac{x}{1 - x - x^2} + r \cdot \left(1 + \frac{x^2}{1 - x - x^2}\right) \\ &= s \cdot F(x) + r \cdot (1 + x \cdot F(x)), \end{aligned}$$

što nam daje

$$a_n = s \cdot F_n + r \cdot F_{n-1}.$$

Ovde je $1 + x \cdot F(x)$ odgovaralo nizu $(1, F_0, F_1, F_2, \dots)$, što baš odgovara pomeranju Fibonačijevog niza jer se može uzeti da je $F_{-1} = 1$ (to dobijamo iz $F_{-1} + F_0 = F_1$!).

II način: Ispišemo prvih nekoliko članova niza

$$a_0 = r, a_1 = s, a_2 = r + s, a_3 = r + 2s, a_4 = 2r + 3s, a_5 = 3r + 5s \dots$$

i onda možemo da naslutimo da je

$$a_n = s \cdot F_n + r \cdot F_{n-1},$$

što se lako pokazuje matematičkom indukcijom!

b) Ovu jednačinu možemo zapisati u obliku

$$b_{n+2} + c = b_{n+1} + c + b_n + c,$$

što se smenom

$$a_n = b_n + c$$

svodi na jednačinu iz dela pod a): $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ uz početne uslove $a_0 = b_0 + c = c$ i $a_1 = b_1 + c = c + 1$. Stoga je

$$a_n = (c+1) \cdot F_n + c \cdot F_{n-1} = c \cdot F_{n+1} + F_n,$$

pa je

$$b_n = a_n - c = c(F_{n+1} - 1) + F_n.$$

c) Lako se matematičkom indukcijom pokazuje da je

$$a_n = F_n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{k}{m}.$$

Kada primenimo sumacionu formulu iz teoretskog uvoda poglavlja 1.5, dobijamo da je

$$a_n = F_n + \binom{n-1}{m+1}.$$

d) Uvedimo smenu $a_n = \log_2 b_n$ (odnosno $b_n = 2^{a_n}$). Tada za niz (a_n) imamo da važi: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ uz početne uslove $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$, što je Fibonačijev niz, tj. $a_n = F_n$. Stoga je

$$b_n = 2^{F_n}.$$

108. a) Ako podskup sadrži broj n on ne sme sadržati i broj $n-1$, te je ostatak tog podskupa u stvari podskup skupa N_{n-2} koji ne sadrži par susednih brojeva. Stoga takvih skupova ima f_{n-2}. Ako podskup ne sadrži broj n onda je to podskup skupa N_{n-1} koji ne sadrži par susednih brojeva i takvih skupova ima f_{n-1}. Tako smo dobili rekurentnu vezu

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

sa početnim uslovima $f_1 = 2$ (to su podskupovi $\emptyset$ i $\{1\}$) i $f_2 = 3$ (to su podskupovi $\emptyset$, $\{1\}$ i $\{2\}$). Ovo su pomereni Fibonačijevi brojevi pa važi

$$f_n = F_{n+2}.$$

b) Slično kao u delu pod a) razmatraćemo da li k-podskup sadrži n ili ne sadrži. Ako k-podskup sadrži n onda je ostatak tog podskupa $(k-1)$-podskup skupa N_{n-2}, pa takvih podskupova ima $f_{n-2,k-1}$. Ako

k-podskup ne sadrži n onda je to k-podskup skupa N_{n-1}, pa takvih podskupova ima $f_{n-1,k}$. Tako smo dobili rekurentnu vezu

$$f_{n,k} = f_{n-1,k} + f_{n-2,k-1},$$

za $k \geq 2$, uz početne uslove $f_{n,k} = 0$ za $n \leq 2k-1$ i $f_{n,1} = n$.

Uvedimo sada funkciju generatrise kao

$$F_k(x) = \sum_{n\geq 1} f_{n,k} x^n.$$

Ako gornju rekurentnu relaciju pomnožimo sa x^n i sumiramo po $n \geq 1$ dobijamo

$$F_k(x) = \frac{x^2 F_{k-1}(x)}{1-x}.$$

Kako je niz $(1,1,1,\dots)$ dat sa $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$, od njega dobijamo $(1,2,3,\dots)$ kao $F'(x)$, a pomeranjem toga niza udesno za jedan, $x \cdot F'(x)$, dobijamo $(0,1,2,\dots)$, tj.

$$F_1(x) = \sum_{n\geq 1} nx^n = x \cdot F'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Sa ovim početnim uslovom nalazimo da je tražena funkcija generatrise

$$F_k(x) = \frac{x^{2k-1}}{(1-x)^{k+1}}.$$

Odavde tražimo i same brojeve:

$$F_k(x) = \frac{x^{2k-1}}{(1-x)^{k+1}} = x^{2k-1}\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = x^{2k-1}\sum_{h\geq 0}\binom{h+k}{k}x^h,$$

a odavde se koeficijent uz x^n dobija za $h = n-2k+1$ i on je jednak $\binom{k+n-2k+1}{k}$, dakle

$$f_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}.$$

109. a) Ako iz blok gomile novčića, koja u prvom redu sadrži tačno k novčića, udaljimo ceo prvi red dobijamo takodje blok gomilu novčića, ali koja u prvom redu ima manje od k novčića. Obratno, ako hoćemo da generišemo sve moguće blok gomile koje imaju u prvom redu tačno k novčića, prvo ćemo postaviti taj red. Zatim biramo broj j, $0 \leq j \leq k-1$. Iznad reda od k novčića stavljamo blok gomilu koja u prvom redu (to je drugi red "velike" blok gomile) ima j novčića. Ako je $j = 0$ to možemo učiniti na tačno jedan način, a inače se ta blok gomilica može postaviti na $k-j$ načina (donji levi nočić blok gomilice može biti iznad 1. i 2. novčića u prvom redu velike

blok gomile, zatim iznad 2. i 3, ..., $(k-j)$-og i $(k-j+1)$-og novčića). Na osnovu svega ovoga dolazimo do rekurentne jednačine

$$f_k = 1 + \sum_{j=1}^{k} (k-j) f_j,$$

uz početni uslov $f_0 = 1$.

Sada ćemo preći na funkcije generatrise (koristimo osobine sabiranja nizova i množenja funkcija generatrise) tako što ćemo prethodnu relaciju pomnožiti sa x^k, a zatim sumirati po $k \geq 1$:

$$F(x) - 1 = \frac{x}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} F(x) - \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ovde se $F(x) - 1$ na levoj strani javlja jer smo vršili sumiranje od $k = 1$, a $f_0 = 1$, dok na desnoj strani imamo: prvi član javlja zbog sabiranja nizova, množenju funkcija generatrisa nizova $(k)_1^\infty$ i $(f_k)_1^\infty$, $\frac{x}{(1-x)^2} \cdot F(x)$, odgovara $\sum_{j=0}^{k} (k-j) f_j$, pa da bi ovo sveli na $\sum_{j=1}^{k} (k-j) f_j$, moramo da oduzmemo $k f_0 = k$, što daje treći član. Kada sredimo ovaj izraz, dobijamo traženu funkciju generatrise:

$$F(x) = \frac{1-2x}{1-3x+x^2}.$$

b) *I način:* Traženu funkciju generatrise možemo predstaviti u obliku

$$F(x) = \frac{1}{10} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\alpha_1 x} + \frac{5+\sqrt{5}}{1-\alpha_2 x} \right),$$

gde su $\alpha_1 = (3+\sqrt{5})/2$ i $\alpha_2 = (3-\sqrt{5})/2$. Odatle dobijamo da je

$$f_k = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right))^k.$$

Sada ćemo još malo transformisati ovaj izraz:

$$\frac{(5-\sqrt{5}) \cdot 2}{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2k} + \frac{(5+\sqrt{5}) \cdot 2}{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2k}$$

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2k-1} = F_{2k-1}.$$

II način: Iz funkcije generatrise ili rekurentne formule za f_k sa sumom možemo doći do linearne rekurentne jednačine

$$f_{n+2} - 3f_{n+1} + f_n = 0,$$

uz početne uslove $f_0 = f_1 = 1$. Zatim se lako pokazuje matematičkom indukcijom da važi

$$f_k = F_{2k-1}.$$

110. Sa a_n ćemo označiti broj odgovarajućih prekrivanja table $2 \times n$.

a) Ako je u donjem levom uglu kvadratić (1×1), onda i iznad njega mora biti kvadratić ($\cdots$) i onda ostaje tabla $2 \times (n-1)$ koja se može prekriti na a_{n-1} načina. Ako je u donjem levom uglu kvadrat 2×2 ($\cdots$), onda ostaje tabla $2 \times (n-2)$ koja se može prekriti na a_{n-2} načina. Tako smo došli do rekurentne jednačine

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Početni uslovi su $a_1 = 1$ ( ) i $a_2 = 2$ (i). Odavde se lako dobija funkcija generatrise

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}\ ,$$

a na osnovu zadatka 107 a) ili uz pomoć principa matematičke indukcije dobijamo da je

$$a_n = F_{n+1}.$$

b) Ako su sa leve strane dva kvadratića jedan na drugom ($\cdots$), onda ostaje tabla $2 \times (n-1)$ koja se može prekriti na a_{n-1} načina. Ako su sa leve strane kvadratić i L-figura, onda u svakom od ta 4 slučaja ($\cdots$, $\cdots$, $\cdots$ i $\cdots$) ostaje tabla $2 \times (n-2)$ koja se može prekriti na a_{n-2} načina. Ako su sa leve strane dve L-figure, onda u svakom od ta 2 slučaja ($\cdots$ i $\cdots$) ostaje tabla $2 \times (n-3)$ koja se može prekriti na a_{n-3} načina. Tako smo došli do rekurentne jednačine

$$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3}.$$

Početni uslovi su: $a_1 = 1$ ( ), $a_2 = 5$ (, , , i) i $a_3 = 11$ (, , , , , , , , , ,). Odavde dobijamo

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - 4x^2 - 2x^3}\ .$$

c) *I način:* Ako je sa leve strane uspravan pravougaonik ($\cdots$), onda ostaje tabla $2 \times (n-1)$ koja se može prekriti na a_{n-1} načina. Ako su sa leve strane dva horizontalna pravougaonika jedan na drugom ($\cdots$), onda ostaje tabla $2 \times (n-2)$ koja se može prekriti na a_{n-2} načina. Malo je komplikovanija situacija sa L-figurama: dve L-figure mogu biti povezane nizom koji sadrži $0, 1, 2, \ldots, n-3$ horizontalna pravougaonika. Ako su povezane bez pravougaonika, onda u svakom od 2 slučaja ($\cdots$ i $\cdots$) ostaje tabla $2 \times (n-3)$ koja se može prekriti na a_{n-3} načina. Ako su povezane sa 1 pravougaonikom, onda u svakom od 2 slučaja ($\cdots$ i $\cdots$) ostaje tabla $2 \times (n-4)$ koja se može prekriti na a_{n-4} načina. Ako su povezane sa 2 pravougaonika, onda u svakom od 2 slučaja ($\cdots$ i $\cdots$) ostaje tabla $2 \times (n-5)$ koja se može prekriti na a_{n-5} načina... Tako smo došli do rekurentne jednačine

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + 2a_{n-5} + \ldots + 2a_1 + 2a_0.$$

Početni uslovi su: $a_1 = 1$ ( ), $a_2 = 2$ (i), $a_3 = 5$ (, , , i), a iz ova tri uslova i rekurentne jednačine možemo dobiti $a_0 = 1$. Iz prethodne jednačine izrazimo $a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} + 2a_{n-4} + 2a_{n-5} + \ldots + 2a_1 + 2a_0$ i to ubacimo u gornju jednačinu i dobijamo jednostavniju rekurentnu jednačinu

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3}$$

sa istim početnim uslovima $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i $a_3 = 5$ (ili $a_0 = 1$). Odavde se lako nalazi funkcija generatrise

$$A(x) = \frac{1-x}{1-2x-x^3}.$$

II način: Neka je a_n isto što i u prethodnom, a sa b_n označimo broj pokrivanja table $2 \times n$ bez jednog ugaonog polja. Ako je sa leve strane uspravan pravougaonik ($\cdots$), onda ostaje tabla $2 \times (n-1)$ koja se može prekriti na a_{n-1} načina. Ako su sa leve strane dva horizontalna pravougaonika jedan na drugom ($\cdots$), onda ostaje tabla $2 \times (n-2)$ koja se može prekriti na a_{n-2} načina. Ako je sa leve strane L-figura, onda u svakom od 2 slučaja ($\cdots$ i $\cdots$) ostaje "krnja" tabla $2 \times (n-1)$ koja se može prekriti na b_{n-1} načina, što nam daje rekurentnu jednačinu $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2b_{n-1}$. Ako imamo "krnju" tablu $2 \times n$, kojoj nedostaje gornji levi ugao, sa leve strane može biti L-figura ($\cdots$) i tada ostaje tabla $2 \times (n-2)$ koja se može pokriti na a_{n-2} načina ili može biti pravougaonik ($\cdots$) i tada ostaje "krnja" tabla $2 \times (n-1)$ koja se može pokriti na b_{n-1} načina, što nam daje rekurentnu jednačinu $b_n = a_{n-2} + b_{n-1}$. Na taj način smo došli do sistema rekurentnih jednačina

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + 2b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-2} + b_{n-1} \end{aligned}$$

uz početne uslove $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Iz ovog sistema možemo dobiti i rekurentnu jednačinu

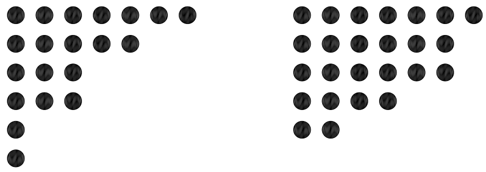
$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3}$$

sa istim početnim uslovima $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, i $a_3 = 5$, kao i funkcije generatrise

$$A(x) = \frac{1-x}{1-2x-x^3} \qquad B(x) = \frac{x^2}{1-2x-x^3}.$$

Napomena: U svakom delu ovog zadatka smo iz početnih uslova i rekurentne veze mogli da dobijemo da je $a_0 = 1$!

111. Traženi dijagrami su :



112. $p(1) = 1$ - jedina particija broja 1 je [1].

$p(2) = 2$ - particije $[1^2]$ i [2].

$p(3) = 3$ - particije $[1^3]$, [1 2] i [3].

$p(4) = 5$ - particije $[1^4]$, $[1^2\ 2]$, [1 3], $[2^2]$ i [4].

$p(5) = 7$ - particije $[1^5]$, $[1^3\ 2]$, $[1^2\ 3]$, [1 4], $[1\ 2^2]$, [2 3] i [5]

$p(6) = 11$ - svakoj particiji broja 5 dodamo 1, svakoj particiji broja 4 koja ne sadrži 1 dodamo 2, svakoj particiji broja 3 koja ne sadrzi 1 i 2 dodamo 3, itd. Na kraju, dodamo particiju [6].

$p(7) = 15$ - slično razmatranje kao i za $p(6)$.

113. $p_5(9) = 5$ - kako svaki od sabiraka u particiji mora da bude veći od 0, to možemo da od svakog sabirka oduzmemo 1, a da zatim tražimo ukupan broj particija broja 4. Svaka particija broja 4 daje tačno jednu particiju na 5 delova broja 9 (npr. particiji [4] odgovara particija $[1^4\ 5]$, particiji [1 3] odgovara particija $[1^3\ 2\ 4]$, itd.).

$p_5(10) = 7$ - slično kao i za $p_5(9)$.

114. Ako je $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, gde je $x_i \geq 1$, onda je $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_k - 1) = n - k$ i neki od sabiraka mogu da budu 0. Dakle, svakoj particiji broja n na k delova pridružimo particiju broja $n - k$, tako što od svakog sabirka oduzmemo 1. Ovakvo pridruživanje je, očigledno, obostrano jednoznačno, pa važi forumla

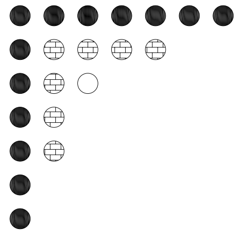
$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \cdots + p_1(n-k)$$

$p(8) = p_1(8) + p_2(8) + \cdots + p_8(8) = 1 + (p_2(6) + p_1(6)) + (p_3(5) + p_2(5) + p_1(5)) + \cdots + 1 = 21$

115. (a) Korišćenjem Fererovih dijagrama dobijamo da su konjugovane particije datih particija, redom, $[1\ 2^2\ 3^2\ 5]$ i $[1^3\ 2^2\ 5\ 7^2]$.

(b) Korišćenjem Fererovih dijagrama dobijamo da su samokonjugovane particije $[1^2\ 2\ 4]$, $[2^2\ 3\ 5^2]$ i $[1^4\ 2\ 3\ 4\ 8]$.

116. Posmatrajmo Fererov dijagram neke samokonjugovane particije.



U njemu su brojevi elemenata po kolonama jednaki brojevima elemenata po odgovarajućim vrstama. Zbog toga je, očigledno, ukupan broj elemenata u k-toj vrsti (na slici: posmatrano odozdo na gore) i k-toj koloni (na slici: posmatrano s leva na desno) neparan. Odavde se vidi da svakoj samokonjugovanoj particiji možemo pridružiti (preko Fererovog dijagrama) particiju u kojoj su svi sabirci različiti i neparni (k-ti sabirak je ukupan broj elemenata iz k-te vrste i kolone), a i obrnuto. Ovakvo pridruživanje je, jasno, obostrano jednoznačno, pa tvrdjenje važi.

117. Neka je S_1 skup svih particija broja n u kojima su sabirci 1 ili 2, a S_2 skup svih particija broja $n+3$ na dva različita sabirka.

Posmatramo particiju $[1^a\ 2^b]$ iz S_1, kao i odgovarajući Fererov dijagram. U prvih a vrsta tog dijagrama je po jedan element, a u sledećih b su po dva elementa. Ovoj particiji pridružimo particiju $[a+1\ a+b+2]$ broja $n+3$ iz S_2 (sabirci su očigledno različiti). Ovakvo pridruživanje je jednoznačno iz S_1 u S_2.

Neka je sada $[a\ b]$ particija iz S_2, $a < b$. Kako je $a > 0$, to možemo da posmatramo particiju $[a-1\ b-2]$, pa da njenu konjugovanu particiju pridružimo particiji $[a\ b]$. Kako je $[a-1\ b-2]$ particija broja n na dva dela (ne obavezno različita), to je (najlakše se vidi sa Ferereovog dijagrama) njena konjugovana particija u S_1. Ovo pridruživanje je, takodje, jednoznačno (sledi direktno iz konstrukcije) iz S_2 u S_1.

Kako smo konstruisali injekcije iz S_1 u S_2, kao i iz S_2 u S_1, to su skuopvi S_1 i S_2 istobrojni, što je i trebalo dokazati.

118. a) Traži se broj particija oblika $[3^{\alpha_1}\ 4^{\alpha_2}]$. Kako je $n = 3\alpha_1 + 4\alpha_2$, to traženi broj particija možemo videti i kao broj rešenja jednačine $i + j = n$, gde $i \in \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$ i $j \in \{0, 4, 8, 12, 16 \ldots\}$. Broj rešenja ove jednačine jednak je koeficijentu uz x^n u proizvodu $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \cdots)$. Dakle, tražena funkcija generatrise je

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^3)(1-x^4)}$$

b) Slično kao i u delu pod a) (sada posmatramo jednačinu $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = n$) zaključujemo da je tražena funkcija generatrise

$$f(x) = \prod_{i=1}^{5} \frac{1}{1-x^k}$$

c) Posmatramo jednačinu $\sum_{i\geq 0} c_i 2^i = n$. Svakoj particiji broja n na sabirke koji su stepeni dvojke odgovara jedno rašenje ove jednačine (c_i je, praktično, broj pojavljivanja broja 2^i kao sabirka). Ovoj jednačini je ekvivalentna jednačina $x_0 + x_1 + x_2 + \cdots = n$, gde je $x_i \in \{0, 2^i, 2\cdot 2^i, 3\cdot 2^i, 4\cdot 2^i, \ldots\}$. Kako je broj rešenja ove jednačine jednak koeficijentu uz x^n u proizvodu $(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x+4+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+x^{12})\cdots$, to je tražena funkcija generatrise

$$f(x) = \prod_{i\geq 0} \frac{1}{1-x^{2^i}}$$

d) Broj traženih particija je jednak broju rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = n$$

gde je $x_k \in \{0, k, 2k\}$ (svaki broj može da se pojavljuje najviše dva puta). Dakle, tražena funkcija generatrise je

$$f(x) = \prod_{k\geq 1}(1 + x^k + x^{2k})$$

e) Slično kao u d), dobijamo

$$f(x) = \prod_{k\geq 1}(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k}) = \prod_{k\geq 1}(1 + x^k)(1 + x^{2k})$$

f) Broj particija u kojima samo neparni sabirci mogu da se javljaju više puta jednak je broju rešenja jednačine $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = n$, gde je $x_{2k} \in \{0, 2k\}$, a $x_{2k-1} \in \{0, 2k-1, 2(2k-1), 3(2k-1), \ldots\}$.

Dakle, broj rešenja ove jednačine jednak je koeficijentu uz x^n u proizvodu

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)(1+x^2)(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\cdots)(1+x^4)\cdots$$

Dakle, tražena funkcija generatrise je

$$f(x) = \prod_{k\geq 1} \frac{1+x^{2k}}{1-x^{2k-1}}$$

g) Ovde posmatramo jednačinu $x_1 + x_2 + \cdots = n$, gde je $x_i \in \{0, 3i, 6i, 9i, \ldots\}$. Broj rešenja ove jednačine jednak je koeficijentu uz x^n u proizvodu $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^6 + x^{12} + \cdots)\cdots$, pa je tražena funkcija generatrise

$$f(x) = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^{3k}}$$

119. Imamo da je

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^m})$$

$$=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^m})$$

$$=(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^m})$$

$$=\cdots=(1-x^{2^m})(1+x^{2^m})=(1-x^{2^{m+1}}).$$

Posmatrajmo sada proizvod $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots$. Slobodan član u ovom proizvodu je očigledno 1. Treba pokazati da je za svaki prirodan broj n koeficijent uz x^n jednak 0.

Izaberemo proizvoljan $n \in \mathbf{N}$. Na osnovu dokazanog dela važi

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots$$

$$=(1-x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+1}})(1+x^{2^{n+2}})(1+x^{2^{n+3}})\cdots.$$

Iz poslednjeg izraza se vidi da je koeficijent uz x^n jednak 0 (jer je sigurno $n<2^{n+1}$). Kako je n bilo proizvoljno izabrano, to važi $(1-x)^{-1}=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})\cdots$.

Dokažimo sada i poslednji deo zadatka. Posmatramo particije broja n u kojima je svaki sabirak stepen dvojke i svaki se javlja najviše jedanput. Broj takvih particija jednak je broju rešenja jednačine $x_0+x_1+x_2+\cdots=n$, gde svaki od brojeva x_i može da bude samo 0 ili 2^i. Broj rešenja ove jednačine je očigledno jednak koeficijentu uz x^n u proizvodu $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots$. Već smo pokazali da je ovaj proizvod jednak $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$, pa je traženi koeficijent uz x^n jednak 1.

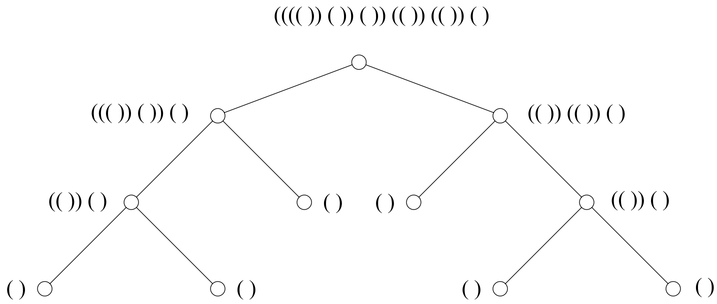
120. Poziciono binarno stablo T koje odgovara korektnom nizu zagrada $A=a_1a_2\ldots a_{2n}$, $n\geq 0$, dobija se na sledeći način:

i) Ako je niz A prazan, tj. $n=0$, tada je stablo T prazno, tj. ne sadrži nijedan čvor.

ii) Ako je $n>0$, tada je a_1='('. Neka je i najmanji prirodan broj tako da je a_i=')' i da podniz $a_2a_3\ldots a_{i-1}$ predstavlja korektan niz zagrada. Tada podniz $a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{2n}$ takodje predstavlja korektan niz zagrada (moguće prazan, ako je $i=2n$).

Stablo T je tada poziciono binarno stablo kod koga je levo podstablo korena stablo koje odgovara nizu $a_2a_3\ldots a_{i-1}$, a desno podstablo korena je stablo koje odgovara nizu $a_{i+1}a_{i+2}\ldots a_{2n}$.

Nizu zagrada datom u zadatku odgovara sledeće stablo, u kome je pored svakog čvora dat niz zagrada koji odgovara podstablu u tom čvoru:



121. Neka su osobe u redu označene brojevima $1, 2, \ldots, 2n$. Da bi blagajnik mogao da vrati kusur osobi j, $j \geq 1$, sa novčanicom od 100 dinara, on u tom trenutku u kasi mora da ima bar jednu novčanicu od 50 dinara, a to je moguće ako i samo ako je medju osobama $1, 2, \ldots, j-1$ broj osoba sa novčanicom od 50 dinara strogo veći od broja osoba sa novčanicom od 100 dinara.

Kako osoba j ima novčanicu od 100 dinara, blagajnik može da vrati kusur svim osobama u redu ako i samo ako je medju osobama $1, 2, \ldots, j$ broj osoba sa novčanicom od 50 dinara veći ili jednak broju osoba sa novčanicom od 100 dinara.

Ako se osobama sa 50 dinara pridruži leva zagrada, a osobama sa 100 dinara pridruži desna zagrada, blagajnik može uvek da vrati kusur ako i samo ako je niz pridruženih zagrada korektan. Prema tome, broj načina da se osobe poredjaju u red tako da svaka osoba dobije svoj kusur jednak je broju korektnih nizova zagrada $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

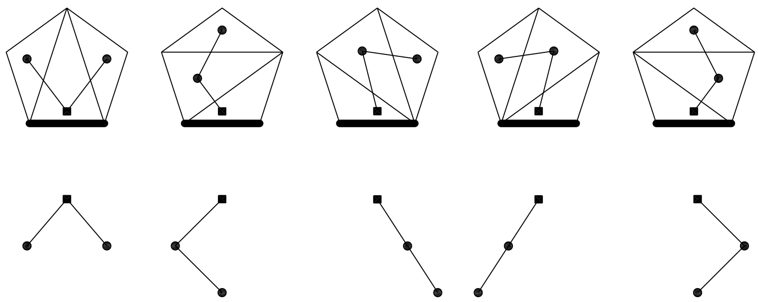
122. Neka je dat konveksni $(n+2)$-gon P_{n+2} i neka je u njemu fiksirana proizvoljna stranica c, koja će se nadalje zvati *osnovna* stranica. Bijekcija $f_n\colon \mathcal{T}_{n+2} \mapsto \mathcal{B}_n$, $n \geq 1$, izmedju skupa $\mathcal{T}_{n+2}$ svih triangulacija poligona P_{n+2} sa osnovnom stranicom c i skupa $\mathcal{B}_n$ svih pozicionih binarnih stabala sa n čvorova može da se konstruiše indukcijom.

Za $n = 1$, bijekcija f_1 trouglu P_3 pridružuje poziciono binarno stablo koje sadrži samo jedan čvor—koren.

Za $n \geq 2$, neka su konstruisane sve bijekcije $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Ako je T proizvoljna triangulacija poligona P_{n+2}, neka je t trougao triangulacije T koji sadrži osnovnu stranicu. Neka je sa L, odnosno R, označen deo poligona P_{n+2} koji se nalazi levo, odnosno desno, od trougla t u odnosu na osnovnu stranicu. U poligonima L i R se za njihove osnovne stranice biraju stranice koje pripadaju trouglu t.

Ako se poligon L sastoji od l trouglova, a poligon R od r trouglova (pri čemu je $l+r = n-1$), tada se triangulaciji T pridružuje poziciono binarno stablo $f_n(T)$, čiji koren odgovara trouglu t, levo podstablo korena je $f_l(L)$, a desno podstablo korena je $f_r(R)$.

Bijekcija f_n se može ilustrovati tako što se u svaki trougao triangulacije stavi po jedan čvor i linijama povežu čvorovi čiji trouglovi imaju zajednički stranicu. Na slici su data poziciona binarna stabla koja odgovaraju triangulacijama pentagona, pri čemu kvadratić označava koren stabla, a deblja linija osnovnu stranicu pentagona.



123. Da bi se korektnom nizu zagrada pridružilo uredjeno binarno stablo, treba primeniti konstrukciju opisanu u zadatku 120, s tim što se sada praznom nizu zagrada pridružuje stablo koje se sastoji od jednog čvora (umesto praznog stabla, kako je dato u zadatku 120).

    Svaki čvor ovako pridruženog stabla ima 0 ili 2 direktna naslednika. Poziciono binarno stablo, dobijeno originalnom konstrukcijom iz zadatka 120, ima n čvorova. Novom konstrukcijom dodaje se k listova. Kako svaki od n čvorova pozicionog binarnog stabla ima po 2 direktna naslednika, a svaki od k listova po 0, ukupan broj direktnih naslednika u novom stablu je $2n$. Svaki čvor stabla, osim korena, je direktan naslednik tačno jednog čvora. Zato je ukupan broj čvorova u stablu $2n+1$, pa je novom konstrukcijom dodato $k = n+1$ listova.

124. Uredjeno stablo T koje odgovara korektnom nizu zagrada $A = a_1a_2\dots a_{2n}$, $n \geq 0$, dobija se na sledeći način:

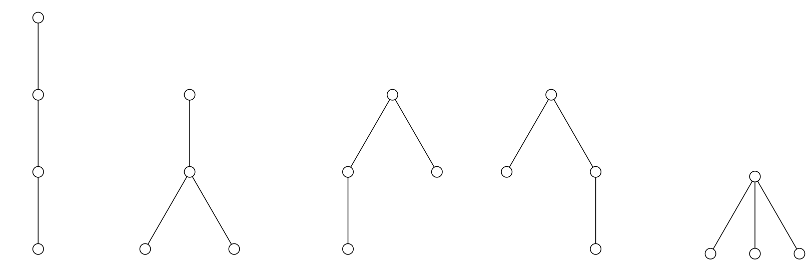
    i) Ako je niz A prazan, tj. $n = 0$, tada se stablo T sastoji samo od jednog čvora—korena.

    ii) Ako je $n > 0$, tada neka brojevi $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_k = 2n$, $k \geq 1$, označavaju sve indekse takve da podniz $a_1a_2\dots a_{m_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, sadrži jednak broj levih i desnih zagrada, tj. da predstavlja korektan niz zagrada.

    Tada za svako $i = 1, 2, \dots, k$, podniz $a_{m_{i-1}+1}a_{m_{i-1}+2}\dots a_{m_i-1}a_{m_i}$ takodje predstavlja korektan niz zagrada, pa je $a_{m_{i-1}+1} =' ('$ i $a_{m_i} =')'$, a onda i podniz $a_{m_{i-1}+2}\dots a_{m_i-1}$ predstavlja korektan niz zagrada (moguće prazan).

    Stablo T je sada uredjeno stablo kog koga je i-to podstablo, $i = 1, 2, \dots, k$, stablo koje odgovara korektnom nizu zagrada $a_{m_{i-1}+2}\dots a_{m_i-1}$.

Uredjena stabla sa četiri čvora odgovaraju sledećim korektnim nizovima zagrada:



((( ))) (( ) ( )) (( )) ( ) ( ) (( )) ( ) ( ) ( )

125. Neka je korak $(0,1)$ jednostavnije označen kao y-korak, a korak $(1,0)$ kao x-korak. Putu P, $P \in S_d$, pridružuje se niz zagrada A tako što se svaki x-korak zameni levom zagradom, a svaki y-korak desnom zagradom.

   Put P nikada ne ide iznad prave $y = x$ ako i samo ako je broj x-koraka, polazeći od $(0,0)$, uvek veći ili jednak broju y-koraka, odnosno ako i samo ako je pridruženi niz zagrada A korektan.

126. Homotetijom sa centrom u $(0,0)$ uz faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i osnom simetrijom oko prave $y = x \cdot \tan\frac{\pi}{8} = x \cdot (\sqrt{2}-1)$, Dikov put od $(0,0)$ do $(2n,0)$ se obostrano jednoznačno preslikava u put od $(0,0)$ do (n,n) iz zadatka 125.

   Alternativno, u putu P od $(0,0)$ do $(2n,0)$ svakom koraku $(1,1)$ se pridružuje leva zagrada, a svakom koraku $(1,-1)$ desna zagrada. Tada je P Dikov put ako i samo ako je pridruženi niz zagrada korektan.

127. Neka je fiksirana tačka p na kružnici. Svakoj konfiguraciji n disjunktnih tetiva pridružuje se niz zagrada tako što se, polazeći od tačke p u smeru kretanja kazaljke na satu, svakoj tački pridružuje leva zagrada ako se prvi put nailazi na neku tetivu, a desna zagrada ako se drugi put nailazi na istu tetivu.

   Niz zagrada je korektan, pošto je u svakom trenutku broj pridruženih desnih zagrada do tog trenutka manji ili jednak broju pridruženih levih zagrada.

128. Slično kao u zadatku 127, svakoj konfiguraciji lukova pridružuje se niz zagrada tako što se, idući sleva nadesno, svakoj tački pridružuje leva zagrada ako se prvi put nailazi na neki luk, a desna zagrada ako se drugi put nailazi na isti luk.

   Niz zagrada je korektan iz istog razloga kao u zadatku 127.

129. Svakom ovakvom nizu brojeva se pridružuje niz zagrada tako što se umesto broja 1 napiše leva zagrada, a umesto broja -1 desna zagrada.

Suma prvih k brojeva je nenegativna ako i samo ako se u toj sumi broj 1 pojavljuje bar onoliko puta koliko i broj -1, odnosno ako i samo ako se u pridruženom nizu zagrada leva zagrada pojavljuje bar onoliko puta koliko i desna zagrada, tj. ako i samo ako je pridruženi niz zagrada korektan.

130. U ovom slučaju se uspostavlja bijekcija sa skupom puteva iz zadatka 125.

Ako je dat put P od $(0,0)$ do (n,n) sa koracima $(0,1)$ i $(1,0)$, koji nikada ne ide iznad prave $y=x$, tada neka a_i, $i=1,2,\ldots,n$, predstavlja površinu ograničenu putom P, pravom $y=-1$ i pravama $x=i-1$ i $x=i$.

Za tako dobijeni niz a_i važi da je:

i) $1 \leq a_1 = 1$, jer put počinje u tački $(0,0)$ korakom $(1,0)$;

ii) $a_i \leq a_{i+1}$, jer korak $(1,0)$ ne menja površinu ispod puta P, a korak $(0,1)$ je povećava za 1;

iii) $a_i \leq i$, jer put P nikada ne ide iznad prave $y=x$.

131. Neka je $b_i = (a_i+1) - a_{i+1} \geq 0$, $i=1,2,\ldots,n$, uz $a_{n+1}=0$. Nizu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se pridružuje niz zagrada tako što se svaki element a_i zameni sa jednom levom zagradom i b_i desnih zagrada.

Pridruženi niz zagrada je korektan, zato što posle zamene elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_i$, $i=1,2,\ldots,n$, niz zagrada sadrži i levih zagrada i

$$\begin{aligned} b_1+b_2+\cdots+b_i &= (a_1+a_2+\cdots+a_i+i)-(a_2+a_3+\cdots+a_{i+1}) \\ &= i+a_1-a_{i+1} = i-a_{i+1} \leq i \end{aligned}$$

desnih zagrada. Ukupan broj zagrada u pridruženom nizu je

$$n+b_1+b_2+\cdots+b_n = n+n-a_{n+1} = 2n.$$

132. Permutaciji $a_1a_2\ldots a_{2n}$ se pridružuje niz zagrada tako što se umesto svakog neparnog broja napiše leva zagrada, a umesto svakog parnog broja desna zagrada.

Osobine permutacije obezbedjuju da u svakom podnizu $a_1a_2\ldots a_m$, za $m \leq 2n$, neparnih brojeva ima više ili jednako od parnih brojeva, jer ako se paran broj $2i$ pojavljuje u ovom podnizu, tada se u njemu pojavljuje i odgovarajući neparan broj $2i-1$. Zbog toga je i u svakom početnom podnizu pridruženog niza zagrada broj levih zagrada veći ili jednak broju desnih zagrada, pa je taj niz zagrada korektan.

133. Svaka stek-permutacija je jedinstveno opisana procesom prolaska njenih elemenata kroz stek, tj. redosledom stavljanja i skidanja elemenata sa steka. Tom redosledu se pridružuje niz zagrada, tako što se svakom stavljanju na stek pridruži leva zagrada, a svakom skidanju sa steka desna zagrada.

S obzirom da je svaki element koji se skida sa steka morao pre toga da bude stavljen na stek, važi da je u svakom trenutku ukupan broj skidanja elemenata sa steka manji ili jednak ukupnom broju stavljanja elemenata na stek, tako da je pridruženi niz zagrada korektan.

134. Neka je R raspored novčića sa n novčića u prvom redu. Korektan niz zagrada f_R pridružen rasporedu R konstruiše se induktivno na sledeći način:

i) Ako je $n = 0$, niz f_R je prazan niz. Ako je $n = 1$, niz f_R je niz '()'.

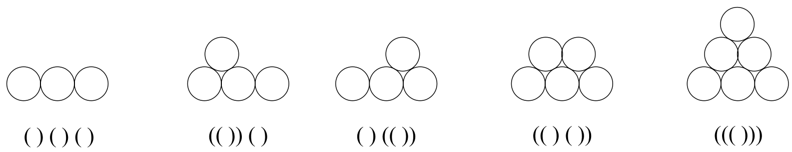
ii) Ako je $n > 1$, neka su konstruisani svi nizovi zagrada pridruženi rasporedima sa manje od n novčića u prvom redu.

Neka su novčići u prvom redu rasporeda R označeni brojevima $1, 2, \ldots, n$, sleva nadesno, i neka je m najveći prirodan broj, $m \leq n$, tako da su svi novčići od 1 do m pokriveni novčićima iz drugog reda.

Ako uklonimo novčiće od 1 do m, tada se preostali novčići dele u dve rasporeda novčića: raspored A novčića koji su bili postavljeni iznad prvih m novčića i raspored B novčića koji su se nalazili desno od njih.

Raspored A u prvom redu ima $m-1$ novčića, a raspored B $n-m$ novčića. Kako je $m-1, n-m \leq n-1$, po induktivnoj pretpostavci konstruisani su korektni nizovi zagrada f_A i f_B. Niz zagrada f_R je niz '$(f_A)f_B$', i on je takodje korektan.

Na slici su dati nizovi zagrada koji odgovaraju rasporedima novčića sa $n = 3$ novčića u prvom redu.



135. U zadatku 69 treba naći vrednosti sledećih izraza:

a) $\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$.

b) $\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m}$.

Primenom metoda zmijskog ulja dobijamo:

a) Ako pretpostavimo da je n fiksirani broj, tada je m slobodna promenljiva od koje zavisi suma. Neka je $f(m) = \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$ i neka je $F(x) = \sum_m x^m f(m)$ funkcija generatrise niza $f(m)$. Imamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_m x^m f(m) = \sum_m x^m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} \\ &= \sum_{k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{m \leq k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} (1+x)^k, \end{aligned}$$

gde smo u poslednjoj jednakost iskoristili binomnu teoremu. Dalje je, uz promenu redosleda činilaca,

$$\begin{aligned} F(x) &= (-1)^n \sum_{k\leq n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (1+x)^k \\ &= (-1)^n (-1 + (1+x))^n = (-1)^n x^n, \end{aligned}$$

gde smo još jednom iskoristili binomnu teoremu.

U dobijenoj funkciji generatrise $F(x) = (-1)^n x^n$, vrednost sume $f(m)$ predstavlja koeficijent uz x^m, pa je očigledno da je

$$f(m) = \begin{cases} (-1)^n, & n = m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

b) Kao i prethodnom delu, pretpostavimo da je n fiksirani broj, a da je m slobodna promenljiva od koje zavisi suma. Neka je $f(m) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$ i neka je $F(x) = \sum_m x^m f(m)$ funkcija generatrise niza $f(m)$. Tada je

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_m x^m f(m) = \sum_m x^m \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} \\ &= \sum_{k\leq n} \binom{n}{k} \sum_{m\leq k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k\leq n} \binom{n}{k} (1+x)^k = (1 + (1+x))^n, \end{aligned}$$

gde smo u poslednje dve jednakosti iskoristili binomnu teoremu.

U dobijenoj funkciji generatrise $F(x) = (2+x)^n$, vrednost $f(m)$ predstavlja koeficijent uz x^m, pa kako je

$$(2+x)^n = \sum_m \binom{n}{m} 2^{n-m} x^m,$$

to je vrednost tražene sume $f(m) = \binom{n}{m} 2^{n-m}$.

136. Dokažimo najpre pomoćno tvrdjenje zadatka. Suma $\sum_r \binom{n}{[\frac{r}{2}]} x^r$ može da se podeli u dve sume, u zavisnosti od parnosti broja r:

$$\begin{aligned} \sum_r \binom{n}{[\frac{r}{2}]} x^r &= \sum_{r=2r_1} \binom{n}{[\frac{2r_1}{2}]} x^{2r_1} + \sum_{r=2r_1+1} \binom{n}{[\frac{2r_1+1}{2}]} x^{2r_1+1} \\ &= \sum_{r_1} \binom{n}{r_1} (x^2)^{r_1} + x \sum_{r_1} \binom{n}{r_1} (x^2)^{r_1} \\ &= (1+x^2)^n + x\,(1+x^2)^n = (1+x)(1+x^2)^n. \end{aligned}$$

Sada prelazimo na odredjivanje vrednosti tražene sume metodom zmijskog ulja. Pretpostavimo da je n fiksirana vrednost, a da je m slobodna promenljiva od koje zavisi suma

$$f(m) = \sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]} y^k.$$

Za funkciju generatrise $F(x) = \sum_m x^m f(m)$ važi

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_m x^m \sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} y^k = \sum_k \binom{n}{k} y^k \sum_m \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} x^m \\ &= \sum_k \binom{n}{k} y^k x^k \sum_m \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} x^{m-k}. \end{aligned}$$

Prema pomoćnom tvrdjenju (sa $r = m - k$) važi

$$\sum_m \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} x^{m-k} = (1+x)(1+x^2)^{n-k},$$

tako da dalje važi

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_k \binom{n}{k} y^k x^k (1+x)(1+x^2)^{n-k} \\ &= (1+x) \sum_k \binom{n}{k} (1+x^2)^{n-k} (xy)^k = (1+x)(1+x^2+xy)^n, \end{aligned}$$

pri čemu smo u poslednjoj jednakosti koristili binomnu teoremu.

U prvom specijalnom slučaju $y = 2$ dobijamo

$$F(x) = (1+x)(1+x^2+2x)^n = (1+x)\left((1+x)^2\right)^n = (1+x)^{2n+1},$$

pa je vrednost sume $f(m)$ koeficijent uz x^m u datoj funkciji generatrise jednaka $\binom{2n+1}{m}$.

U drugom specijalnom slučaju $y = -2$ dobijamo

$$F(x) = (1+x)(1+x^2-2x)^n = (1+x)(1-x)^{2n} = (1-x)^{2n} + x\,(1-x)^{2n},$$

a vrednost sume $f(m)$ je, po binomnoj teoremi, jednaka

$$\binom{2n}{m}(-1)^m + \binom{2n}{m-1}(-1)^{m-1} = (-1)^m \left[\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1}\right].$$

137. Pretpostavimo da je vrednost n fiksirana, a da je j slobodna promenljiva od koje zavise obe strane jednakosti:

$$f(j) = \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j} x^k, \qquad g(j) = \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j}.$$

S obzirom da se u jednakosti već pojavljuje promenljiva x, funkcije generatrisa ćemo definisati preko nove nezavisne promenljive y:

$$F(y) = \sum_j y^j f(j), \qquad G(y) = \sum_j y^j g(j).$$

Sada, po metodu zmijskog ulja, dobijamo

$$\begin{aligned}
F(y) &= \sum_j y^j \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j} x^k = \sum_k \binom{n}{k} x^k \sum_j \binom{k}{j} y^j \\
&= \sum_k \binom{n}{k} x^k \cdot (1+y)^k \quad \text{(po binomnoj teoremi)} \\
&= \sum_k \binom{n}{k} (x+xy)^k = (1+x+xy)^n \quad \text{(po binomnoj teoremi).}
\end{aligned}$$

S druge strane je

$$\begin{aligned}
G(y) &= \sum_j y^j \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j} = \sum_j \binom{n}{j} (1+x)^{n-j} (xy)^j \\
&= (1+x+xy)^n \quad \text{(po binomnoj teoremi).}
\end{aligned}$$

Kako su funkcije generatrisa $F(y)$ i $G(y)$ jednake, to za svako j mora da važi i $f(j) = g(j)$, što je i trebalo dokazati.

138. Pretpostavimo da je n fiksirana vrednost, a da je m slobodna promenljiva od koje zavise leva i desna strana date jednakosti:

$$f(m) = \sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n}, \qquad g(m) = \binom{2m+1}{2n}.$$

Da bi dokazali ovu jednakost, dokazaćemo jednakost funkcija generatrisa $F(x) = \sum_m x^m f(m)$ i $G(x) = \sum_m x^m g(m)$.

Za nalaženje funkcije $F(x)$ primenićemo metod zmijskog ulja:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_m x^m \sum_k \binom{2n+1}{2k}\binom{m+k}{2n} \\
&= \sum_k \binom{2n+1}{2k} \sum_m \binom{m+k}{2n} x^m \\
&= \sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{-k} \sum_m \binom{m+k}{2n} x^{m+k} \\
&= \sum_k \binom{2n+1}{2k} x^{-k} \frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}} \\
&= \frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}} \sum_k \binom{2n+1}{2k} \left(x^{-1/2}\right)^{2k}.
\end{aligned}$$

Prema zadatku 92 važi

$$\sum_k \binom{2n+1}{2k} \left(x^{-1/2}\right)^{2k} = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1}\right),$$

pa, nakon malo sredjivanja, dobijamo

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{2n-1}\left(\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{2n+1}}-\frac{1}{(1+\sqrt{x})^{2n+1}}\right).$$

S druge strane, za funkciju $G(x)$ važi

$$G(x)=\sum_m\binom{2m+1}{2n}x^m=\left(x^{-1/2}\right)\sum_m\binom{2m+1}{2n}\left(x^{1/2}\right)^{2m+1},$$

a prema zadatku 93 dobijamo da je

$$\begin{aligned} G(x) &= \left(x^{-1/2}\right)\left[\frac{(x^{1/2})^{2n}}{2}\cdot\left(\frac{1}{(1-x^{1/2})^{2n+1}}-(-1)^{2n}\frac{1}{(1+x^{1/2})^{2n+1}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{(1-x^{1/2})^{2n+1}}-\frac{1}{(1+x^{1/2})^{2n+1}}\right). \end{aligned}$$

139. Umesto sume $\sum_k(-1)^{n-k}\binom{2n}{k}^2$ na koju se ne može lako primeniti metod zmijskog ulja, posmatraćemo sumu $\sum_k(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-m+k}$. Prva suma je specijalan slučaj druge sume, ako stavimo da je $m=2n$ i rezultat pomnožimo sa $(-1)^n$.

Neka je n fiksirana vrednost, a m slobodna promenljiva od koje zavisi suma

$$f(m)=\sum_k(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-m+k}$$

i neka je

$$F(x)=\sum_m x^m f(m).$$

Imamo da je

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_m x^m\sum_k(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n}{2n-m+k} \\ &= \sum_k(-1)^k\binom{2n}{k}\sum_m\binom{2n}{2n-m+k}x^m \\ &= \sum_k(-1)^k\binom{2n}{k}x^k\sum_m\binom{2n}{m-k}x^{m-k} \\ &= \sum_k(-1)^k\binom{2n}{k}x^k(1+x)^{2n} \qquad \text{(po binomnoj teoremi)} \\ &= (1-x)^{2n}(1+x)^{2n}=\left(1-x^2\right)^{2n} \qquad \text{(po binomnoj teoremi)} \\ &= \sum_r\binom{2n}{r}(-1)^r x^{2r}. \end{aligned}$$

Za $m = 2n$ koeficijent uz x^{2n} u prethodnoj funkciji jednak je $(-1)^n\binom{2n}{n}$. Zato je vrednost prvobitne sume jednaka $(-1)^n\left((-1)^n\binom{2n}{n}\right) = \binom{2n}{n}$.

140. Neka je

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k}, \qquad g(n) = \binom{4n}{2n},$$

i

$$F(x) = \sum_n x^n f(n), \qquad G(x) = \sum_n x^n g(n).$$

Imamo da je

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_n x^n \sum_{0\le k\le n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} \\ &= \sum_{0\le k} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \sum_n \binom{2n}{2k} x^n 2^{2n} \\ &= \sum_{0\le k} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \sum_n \binom{2n}{2k} \left(2\sqrt{x}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Prema zadatku 93, imamo da je

$$\sum_n \binom{2n}{2k} \left(2\sqrt{x}\right)^{2n} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\right)^{2k} \left(\frac{1}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^{2k+1}} + \frac{1}{\left(1+2\sqrt{x}\right)^{2k+1}} \right),$$

tako da, nakon nešto sredjivanja, dobijamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\left(1-2\sqrt{x}\right)} \sum_k \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2} \right)^k \\ &\quad + \frac{1}{2\left(1+2\sqrt{x}\right)} \sum_k \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{\left(1+2\sqrt{x}\right)^2} \right)^k. \end{aligned}$$

S obzirom da je $\sum_n \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$, dalje imamo

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\left(1-2\sqrt{x}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4\frac{x}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}}} \\ &\quad + \frac{1}{2\left(1+2\sqrt{x}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4\frac{x}{\left(1+2\sqrt{x}\right)^2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-4\sqrt{x}}} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\sqrt{x}}}. \end{aligned}$$

S druge strane, da bi izračunali funkciju $G(x)$ uočimo najpre da sabiranjem sledeće dve jednakosti

$$\sum_n \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \qquad \sum_n \binom{2n}{n} (-x)^n = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$$

dobijamo da je za $n = 2k$

$$\sum_k \binom{4k}{2k} x^{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} + \frac{1}{\sqrt{1+4x}}\right).$$

Sada je

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_n \binom{4n}{2n} x^n = \sum_n \binom{4n}{2n} \left(\sqrt{x}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{1+4\sqrt{x}}}\right), \end{aligned}$$

pa važi $F(x) = G(x)$, a samim tim i $f(n) = g(n)$ za svako n.

141. Da dokažemo ovu jednakost, formiraćemo funkcije generatrise po novoj nezavisnoj promenljivoj t (s obzirom da se u jednakosti već nalazi promenljiva x) za izraze na levoj i desnoj strani jednakosti i pokazati da su te funkcije generatrise jednake. Iz jednakosti funkcija generatrisa tada sledi jednakost njihovih koeficijenata uz t^n za svako n.

Neka je

$$f(n) = \sum_{k\geq 1} \binom{n+k-1}{2k-1} \frac{(x-1)^{2k} x^{n-k}}{k}, \qquad g(n) = \frac{(x^n-1)^2}{n},$$

i

$$F(t) = \sum_n t^n f(n), \qquad G(t) = \sum_n t^n g(n).$$

Metodom zmijskog ulja najpre nalazimo funkciju $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n\geq 1} t^n \sum_{k\geq 1} \binom{n+k-1}{2k-1} \frac{(x-1)^{2k} x^{n-k}}{k} \\ &= \sum_{k\geq 1} \frac{(x-1)^{2k}}{k} \sum_n \binom{n+k-1}{2k-1} x^{n-k} t^n \\ &= \sum_{k\geq 1} \frac{(x-1)^{2k}}{k} \frac{1}{x^{2k-1}} \frac{1}{t^{k-1}} \sum_n \binom{n+k-1}{2k-1} (xt)^{n+k-1}. \end{aligned}$$

S obzirom da je poznato da je $\sum_n \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$, tada važi i da je

$$\sum_n \binom{n+k-1}{2k-1} (xt)^{n+k-1} = \frac{(xt)^{2k-1}}{(1-xt)^{2k}},$$

pa zamenom u poslednji izraz za $F(t)$ dobijamo

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \frac{(x-1)^{2k}\, t^k}{(1-xt)^{2k}} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \left(\frac{(1-x)^2 t}{(1-xt)^2} \right)^k \\ &= \log \frac{1}{1-\frac{(1-x)^2 t}{(1-xt)^2}} = \log \frac{(1-xt)^2}{(1-xt)^2 - t(1-x)^2} = \log \frac{(1-xt)^2}{(1-t)(1-x^2 t)}, \end{aligned}$$

pri čemu se jednakost izmedju prvog i drugog reda zasniva na činjenici da je $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n = \log \frac{1}{1-x}$.
S druge strane, imamo

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{n\geq 1} t^n \cdot \frac{(x^n-1)^2}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{t^n(x^{2n} - 2x^n + 1)}{n} \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{t^n x^{2n}}{n} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{t^n x^n}{n} + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n} \\ &= \log \frac{1}{1-tx^2} - 2\log \frac{1}{1-tx} + \log \frac{1}{1-t} = \log \frac{(1-tx)^2}{(1-t)(1-tx^2)}, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da važi $F(t) = G(t)$.

142. Da bi pojednostavili zapis sume, uvedimo promenljivu $r = p + k$. Tada je

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{2n+1}{2p+2k+1} \binom{p+k}{k} &= \sum_r \binom{2n+1}{2p+2k+1} \binom{p+k}{p} \\ &= \sum_r \binom{2n+1}{2r+1} \binom{r}{p}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je vrednost p fiksirana, a da je n slobodna promenljiva od koje zavisi suma

$$f(n) = \sum_r \binom{2n+1}{2r+1} \binom{r}{p}.$$

Sada ćemo primeniti metod zmijskog ulja, ali u nešto izmenjenom obliku: posmatraćemo funkciju generatrise $F(x) = \sum_n x^{2n+1} f(n)$! U tom slučaju imamo:

$$F(x) = \sum_n x^{2n+1} \sum_r \binom{2n+1}{2r+1} \binom{r}{p} = \sum_r \binom{r}{p} \sum_n \binom{2n+1}{2r+1} x^{2n+1}.$$

Prema zadatku 93 važi

$$\sum_n \binom{2n+1}{2r+1} x^{2n+1} = \frac{1}{2}\, x^{2r+1} \left(\frac{1}{(1-x)^{2r+2}} + \frac{1}{(1+x)^{2r+2}} \right),$$

tako da, uz malo sredjivanja, dobijamo

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}\sum_r\binom{r}{p}\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^r \\
&+ \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x)^2}\sum_r\binom{r}{p}\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^r \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^p}{\left(1-\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^{p+1}} \\
&+ \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(1+x)^2}\cdot\frac{\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^p}{\left(1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^{p+1}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{2p+1}}{(1-2x)^{p+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{2p+1}}{(1+2x)^{p+1}} \\
&= \frac{x^{2p+1}}{2}\left((1+2x)^{-(p+1)}+(1-2x)^{-(p+1)}\right).
\end{aligned}$$

Vrednost sume $f(n)$ sada je koeficijent uz x^{2n+1} u funkciji generatrise $F(x)$, pa pomoću uopštene binomne teoreme dobijamo da je

$$\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\binom{-(p+1)}{2n-2p}2^{2n-2p}+\binom{-(p+1)}{2n-2p}(-2)^{2n-2p}\right) \\
&= \binom{-(p+1)}{2n-2p}2^{2n-2p},
\end{aligned}$$

a negacijom gornjeg indeksa binomnog koeficijenta (poglavlje 1.5) dobijamo da je

$$f(n)=(-1)^{2n-2p}\binom{(p+1)+(2n-2p)-1}{2n-2p}2^{2n-2p}=\binom{2n-p}{2n-2p}2^{2n-2p}.$$

143. (a) Dvostruki broj grana u grafu jednak je zbiru stepena čvorova grafa. Medjutim, kako je zbir $3+3+3+3+5+6+6+6+6+6+6=53$ neparan broj, zaključujemo da ne postoji graf sa ovakvim nizom stepena čvorova.

(b) Svih 14 čvorova bi trebalo podeliti u dva nezavisna skupa (skupovi čvorova medju kojima nema grana). Grane u bipartitnom grafu spajaju samo čvorove iz različitih skupova, pa zbir stepena čvorova u prvom skupu mora biti jednak zbiru stepena čvorova u drugom skupu. Ukupan zbir stepena čvorova je 68, što znači da čvorove treba podeliti na dve grupe takve da je u svakoj zbir stepena čvorova jednak 34. S obzirom da samo broj 5 medju zadatim stepenima nije deljiv sa 3, to u jednom od ova dva skupa moraju da se nadju samo čvorovi čiji su stepeni deljivi sa 3, ali tada zbir stepena u tom skupu ne može da bude jednak 34. Stoga zaključujemo da ne postoji bipartitni graf sa zadatim nizom stepena čvorova.

(c) Neka traženi graf ima skup čvorova $V = \{v_1, \ldots, v_{10}\}$. Jedan od njih, recimo v_1, je stepena 9, pa mora da bude povezan sa svim ostalim čvorovima. Dva čvora, recimo v_2 i v_3 imaju stepen 1, pa oni ne mogu da imaju drugih suseda, sem v_1. Medjutim, tada čvor stepena 8, recimo v_4, za susede može da ima samo čvorove v_1 i v_5, v_6, $\ldots$, v_{10}, tako da njegov stepen može da bude najviše 7, što je kontradikcija. Dakle, graf sa traženim nizom stepena čvorova ne postoji.

144. Svaki tim posmatramo kao čvor grafa, a svaku utakmicu izmedju dva tima kao granu grafa. Problem se svodi na postojanje grafa sa dve grupe od po 13 čvorova, takvog da svaki čvor ima 9 suseda u svojoj i 4 suseda u drugoj grupi. Takav graf bi morao da ima indukovani 9-regularni podgraf sa 13 čvorova (izaberemo sve čvorove iz jedne od grupa), tj. podgraf sa neparnim brojem čvorova čiji su svi čvorovi neparnog stepena. Takav graf ne postoji, pa traženi raspored utakmica nije moguće napraviti.

145. Neka je $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ skup čvorova grafa G, takav da je $d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \ldots \leq d_G(v_n)$.

(a) Brisanjem čvora v_n, stepen svakog njegovog suseda (kojih ima $d_G(v_n)$) se smanjuje za 1. Stepeni ostalih čvorova se ne menjaju. To znači da je ukupan zbir stepena čvorova u grafu, posle brisanja čvora v_n jednak $\sum_{i=1}^{n-1} d_G(v_i) - d_G(v_n)$.

Pretpostavimo da brisanje čvora najvećeg stepena povećava prosečnu vrednost stepena čvorova. Tada bi važilo

$$\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} d_G(v_i) - d_G(v_n)\right) > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i),$$

odnosno

$$n\sum_{i=1}^{n-1} d_G(v_i) - nd_G(v_n) > (n-1)\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_G(v_i) - (n-1)d_G(v_n) - nd_G(v_n) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (d_G(v_i) - d_G(v_n)) - nd_G(v_n) > 0,$$

što je nemoguće jer je v_n čvor najvećeg stepena u G. Prema tome, brisanje čvora najvećeg stepena ne može da poveća prosečnu vrednost stepena čvorova.

(b) Ovo tvrdjenje nije tačno. Neka je $G = C_3$. U njemu je svaki čvor stepena 2, pa je i prosečna vrednost stepena čvorova jednaka 2. Brisanjem jednog čvora dobija se P_2 u kome su oba čvora stepena 1, tj. prosečna vrednost stepena čvorova je smanjena.

Napomena: Sličnim razmatranjem kao i u delu (a), može se zaključiti da u svakom grafu za koji je $\sum_{i=2}^{n} d_G(v_i) < (2n-1)d_G(v_1)$ brisanje čvora najmanjeg stepena zaista smanjuje prosečnu vrednost stepena čvorova.

146. (a) Pretpostavimo suprotno, tj. neka su u grafu G sa n čvorova svi čvorovi različitih stepena. Kako je maksimalni stepena čvora u grafu sa n čvorova jednak $n-1$, to znači da su stepeni čvorova u grafu G jednaki $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ovo, medjutim, nije moguće, jer u grafu ne mogu istovremeno da postoje čvor stepena 0, koji nije povezan ni sa jednim čvorom, i čvor stepena $n-1$, koji je povezan sa svim čvorovima. Dakle, u grafu G bar dva čvora imaju isti stepen.

(b) Ako situaciju na turniru predstavimo grafom, tako da svaki igrač predstavlja čvor grafa, a odigrana partija izmedju dva igrača granu grafa, onda na osnovu dela (a) zaključujemo da u svakom trenutku postoje dva čvora istog stepena. Samim tim, u svakom trenutku na turniru postoje dva igrača sa istim brojem odigranih partija.

147. Rešenje ovog zadatka zasniva se na sledećim zapažanjima:

a) Graf mora da sadrži čvor stepena 0 ili čvor stepena $n-1$. U suprotnom, stepeni čvorova mogu da imaju vrednosti $1, 2, \ldots, n-2$, pa medju n stepena ne bi imali samo jedan par istih stepena. Takodje, jasno je da graf ne može istovremeno da sadrži i čvor stepena 0 i čvor stepena $n-1$.

b) Ako graf sadrži dva čvora stepena 0, onda je to $\overline{K_2}$. Naime, ako graf sadrži više od dva čvora, onda brisanjem čvorova stepena 0 dobijamo graf u kome su stepeni svih čvorova različiti, što je nemoguće po zadatku 146a).

c) Ako graf sadrži dva čvora stepena $n-1$, onda je to K_2. Kao pod b), ako graf sadrži više od dva čvora, onda brisanjem čvorova stepena $n-1$ dobijamo graf u kome su stepeni svih čvorova različiti, što je nemoguće po zadatku 146a).

d) Ako graf sadrži tačno jedan čvor stepena 0, tada se brisanjem tog čvora ne menjaju stepeni ostalih čvorova, tako da dobijeni graf ima sve stepene različite, izuzev stepena s koji se pojavljuje dva puta. Takodje, dobijeni graf ne sadrži čvor stepena 0.

e) Ako graf sadrži tačno jedan čvor stepena $n-1$, tada se brisanjem tog čvora stepeni ostalih čvorova smanjuju za 1, tako da dobijeni graf ima sve stepene različite, izuzev stepena $s-1$ koji se pojavljuje dva puta. Takodje, dobijeni graf ne sadrži čvor stepena $(n-1)-1$.

Na osnovu prethodnih zapažanja, vidimo da polazeći od grafa sa n čvorova i naizmeničnim brisanjem čvora stepena 0 ili čvora stepena $n-1$, na kraju dolazimo ili do grafa $\overline{K_2}$ ili K_2. Vrednost s sada zavisi od parnosti n i od toga da li početni graf sadrži čvor stepena 0 ili čvor stepena $n-1$.

Na primer, ako je n parno i početni graf sadrži čvor stepena 0, tada se najpre uklanja čvor stepena 0, pa zatim čvor stepena $n-1$ i tako redom po $\frac{n-2}{2}$ puta dok ne ostane graf sa dva čvora koji sadrži čvor stepena 0, tj. graf $\overline{K_2}$. U ovom procesu vrednost s je umanjena za $\frac{n-2}{2}$ i na kraju je jednaka 0, tako da je $s=\frac{n-2}{2}$.

Na sličan način, ako je n parno, a početni graf sadrži čvor stepena $n-1$, tada je $s=\frac{n}{2}$, a ako je n neparno, tada i u slučaju da početni graf sadrži čvor stepena 0 i u slučaju da sadrži čvor stepena $n-1$, dobijamo da je $s=\frac{n-1}{2}$.

148. Put sa tri čvora ima dva čvora stepena 1 i jedan čvor stepena 2. Dakle, moguće matrice susedstva za P_3 su :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ciklus sa tri čvora je kompletan graf, pa je njegova matrica susedstva :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

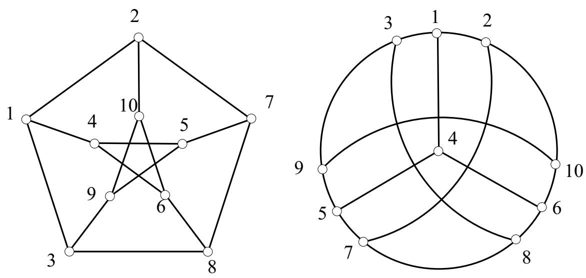
149. Matrica susedstva za K_n ima nule na glavnoj dijagonali, a svi ostali elementi su joj jedinice :

$$\begin{bmatrix} 0 & & \text{\Large 1} & \\ & 0 & & \\ \text{\Large 1} & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica susedstva grafa $K_{m,n}$ je blok matrica oblika :

$$\begin{bmatrix} 0_{m\times m} & 1_{m\times n} \\ 1_{n\times m} & 0_{n\times n} \end{bmatrix}$$

150. (a) Na slici je prikazano odgovarajuće preslikavanje čvorova prvog grafa u čvorove drugog grafa.

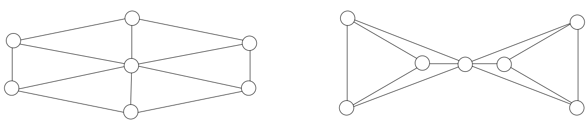


(b) Zadržimo oznake čvorova iz dela (a). Izomorfizam izmedju grafova iz dela (a) i datog grafa je dat preslikavanjem

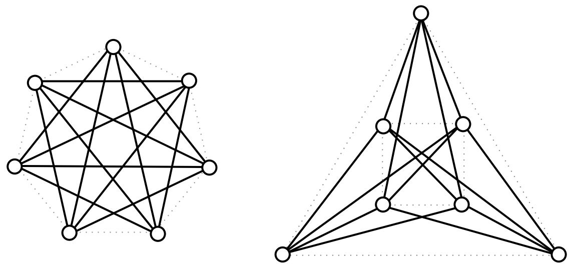
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \{1,2\} & \{3,4\} & \{3,5\} & \{4,5\} & \{2,3\} & \{1,3\} & \{1,5\} & \{2,4\} & \{1,4\} & \{2,5\} \end{pmatrix}$$

151. Prvi graf (Petersenov graf) ne sadrži kao indukovani podgraf C_4, dok ga drugi i treći graf očigledno sadrže. Zato prvi graf nije izomorfan sa ostala dva. Dalje, drugi graf sadrži C_4 kao indukovani podgraf samo dva puta, dok treći graf ima pet ciklusa dužine 4. Zbog toga ni drugi i treći graf nisu izomorfni.

152. Ovi grafovi imaju 7 čvorova i jedan čvor stepena 6 koji je susedan sa svim ostalim čvorovima. Ako se taj čvor izbriše, dobija se 2-regularan graf sa 6 čvorova. Kako 2-regularan povezan graf mora da ima najmanje 3 čvora, zaključujemo da dobijeni graf ima najviše dve komponente povezanosti. Dakle, preostaju dve mogućnosti - da dobijeni 2-regularan graf bude ciklus dužine 6, ili da ima dve komponente povezanosti, obe ciklusi dužine 3. Dakle, postoje ukupno dva neizomorfna grafa sa datim nizom stepena čvorova.



153. Komplement 4-regularnog grafa sa 7 čvorova je 2-regularni graf sa 7 čvorova. 2-regularni graf sa 7 čvorova je C_7, ili se sastoji od dve komponente povezanosti, jedna je C_3, a druga C_4. Kako su grafovi izomorfni ako i samo ako su im komplementi izomorfni, to postoje 2 neizomorfna tražena grafa :



154. Graf mora da ima n grana. Možemo da fiksiramo grane, a da zatim svakoj grani dodeljujemo jedan par brojeva iz $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Krajeve prve grane možemo da izaberemo na $\binom{2n}{2}$ načina. Posle toga, krajeve druge grane biramo na $\binom{2n-2}{2}$, itd. Na osnovu pravila proizvoda zaključujemo da je ukupan broj ovakvih izbora jednak

$$\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\binom{2n-4}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$$

Medjutim, za grane u grafu nije bitan njihov raspored, već samo koji su im čvorovi krajevi. To znači da smo u prethodnom razmatranju, svaki graf brojali tačno $n!$ puta. Dakle, ukupan broj grafova izomorfnih grafu sa granama $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$ je

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)!!$$

155. Čvorove grafa označimo sa $1, 2, \ldots, n$. Svaki graf ima bar jedan automorfizam - identičko preslikavanje.

(a) Jedini automorfizam grafa P_n, sem identičkog je preslikavanje

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dakle, P_n ima dva automorfizma.

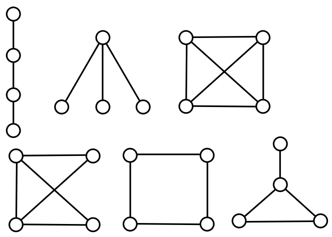
(b) Svaka permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ koja održava redosled elemenata kada se oni posmatraju na krugu, u smeru ili suprotno od smera kretanja kazaljki na satu, odredjuje jedan automorfizam grafa C_n. To su permutacije $(1, 2, \ldots, n)$, $(2, 3, \ldots, n, 1)$, $(3, 4, \ldots, n, 1, 2)$, $\ldots$, kao i $(n, n-1, \ldots, 1)$, $(n-1, n-2, \ldots, 1, n)$, $(n-2, n-3, \ldots, 1, n, n-1)$, $\ldots$. Takvih permutacija ima ukupno $2n$, pa toliko ima i automorfizama grafa C_n.

(c) Svako preslikavanje skupa čvorova odredjeno proizvoljnom permutacijom skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ jeste jedan automorfizam grafa K_n. Znači, K_n ima ukupno $n!$ automorfizama.

156. (a) Ima smisla ispitivati samo povezane grafove (ako su sve komponente povezanosti grafa simetrične, onda je to i sam graf).

Za grafove sa 2 i 3 čvora, dokaz tvrdjenja je trivijalan. Jedini povezan graf sa dva čvora je P_2, a sa tri čvora postoje dva povezana grafa - P_3 i C_3. Svi oni su simetrični.

Povezani neizomorfni grafovi sa četiri čvora su prikazani na slici. Lako se vidi da su svi simetrični.

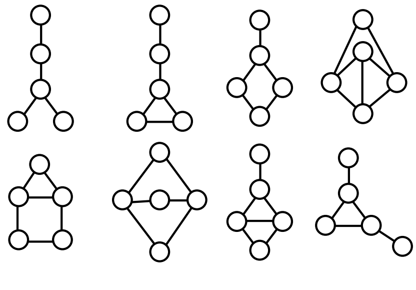


Neka graf G ima 5 čvorova - $v_1, v_2, \ldots, v_5$ i neka je $1 \leq d_G(v_1) \leq d_G(v_2) \leq \cdots \leq d_G(v_5) \leq 4$.

Neka je $d_G(v_5) = 4$. Prema prethodnom, podgraf indukovan čvorovima v_1, …, v_4 je simetričan, pa postoji automorfizam (različit od identičkog) koji slika taj podgraf na samog sebe. Proširenje tog automorfizma koje čvor v_5 slika u sebe je automorfizam grafa G (naravno, različit od identičkog). Dakle, graf sa 5 čvorova i čvorom stepena 4 je simetričan.

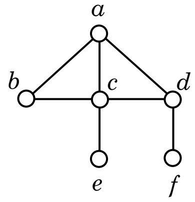
Jedina dva grafa za koje može da važi $d_G(v_5) = 2$ su P_5 i C_5. Oba grafa su simetrična.

Preostaju slučajevi kada je $d_G(v_5) = 3$ i oni su prikazani na slici



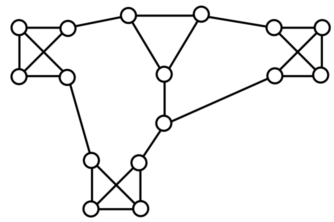
Svi su, takodje, simetrični.

(b) Na slici je prikazan asimetričan graf sa 6 čvorova.



Čvor c je jedini čvor stepena 4, a čvor b jednini čvor stepena 2 u grafu, pa pri svakom automorfizmu oni moraju da se preslikavaju sami u sebe. Takodje, čvorovi e i f, odnosno a i d, iako su istih stepena (e i f stepena 1, a i d stepena 3), pri svakom automorfizmu moraju da se slikaju sami u sebe zbog različitih nizova stepena čvorova njihovih suseda. Dakle, graf je zaista asimetričan.

(c) Traženi graf je prikazan na slici.



157. Pretpostavimo da su u grafu G svi čvorovi parnog stepena i da on sadrži most. Neka su u i v čvorovi za koje je grana uv most. Tada bi u grafu $G - uv$ čvorovi u i v bili jedini čvorovi neparnog stepena u svojim komponentama povezanosti, što nije moguće, jer broj čvorova neparnog stepena u svakom grafu mora da bude paran. Dakle, graf G ne može da sadrži most.

158. Prvo treba primetiti da svaka komponenta povezanosti treba da bude kompletan graf.

Neka je G graf sa najviše grana i k komponenti povezanosti, koje su sve kompletni grafovi. Neka je H_1 komponenta povezanosti koja ima najveći broj čvorova, recimo m. Ako postoji komponenta povezanosti H_2 sa $t \geq 2$ čvorova, tada bi prebacivanjem čvora iz H_2 u H_1 obrisali $t-1$ i dodali m grana, tj. novi graf bi imao više grana od G.

Prema tome, sve komponente sem H_1 sastoje se od samo jednog čvora. Kako G ima n čvorova i k komponenti, komponenta H_1 je K_{n-k+1}. Graf G ima $\binom{n-k+1}{2}$ grana, što je traženi maksimalni broj grana.

159. (a) Neka su u i v dva proizvoljna čvora grafa G sa n čvorova. Kako je $d_G(u)+d_G(v) \geq 2\delta(G) \geq n-1$, to u i v imaju bar jednog zajedničkog suseda w. Tada je u, w, v put izmedju čvorova u i v, pa kako su u i v proizvoljni, zaključujemo da je G povezan graf.

(b) Pretpostavimo da graf nije povezan. Kako je najveći stepen čvora u grafu jednak $\lceil n/2 \rceil$, to jedna komponenta povezanosti mora da sadrži $\lceil n/2 \rceil + 1$ čovorova. Tada ostale komponente sadrže najviše $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ čvorova. Medjutim, u tom slučaju najmanji stepen čvora u grafu ne može da bude $\lfloor n/2 \rfloor - 1$, jer stepen čvora mora da bude bar za 1 manji od broja čvorova u svojoj komponenti povezanosti.

160. Neka je G nepovezan graf i neka je H komponenta povezanosti sa k čvorova. Ako je e broj grana grafa G, tada važi

$$\begin{aligned} e \leq \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} &= \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - k(n-k) \end{aligned}$$

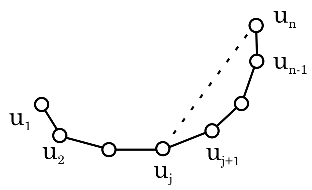
Kako je $1 \leq k \leq n-1$, to je $k(n-k) \geq n-1$, pa je

$$e \leq \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

što je kontradikcija. Prema tome, G je povezan graf.

161. Neka su v_1, v_2, ..., v_n čvorovi grafa G, tako da je čvor v_i ima stepen d_i, i=1, 2, ..., n. Pretpostavimo da G ima bar dve komponente povezanosti. U komponenti kojoj pripada v_n ima bar $d_n + 1$ čvorova, što znači da u ostalim komponentama ima najviše $n-1-d_n$ čvorova. Neka je H neka od ostalih komponenti i neka ima p čvorova. Kako je $p \leq n-1-d_n$, iz uslova $d_p \geq p$ zaključujemo da postoji najviše $p-1$ čvorova stepena manjeg od p. Odavde sledi da H mora da sadrži čvor stepena bar p, što je nemoguće. Prema tome, G je povezan graf.

162. Neka je $l = u_1u_2 \dots u_k$ put najveće dužine u G. Čvor u_k je stepena bar 2, pa on, sem čvora u_{k-1}, mora da ima još jednog suseda v. Čvor v mora da se poklapa sa nekim od čvorova u_1, u_2, ..., u_{k-2}, jer bi, u suprotnom put $t = u_1u_2 \dots u_kv$ bio duži od l. Dakle, postoji $j \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ tako da je $v = u_j$. Tada je $u_ju_{j+1} \dots u_k$ ciklus u G.



163. Neka je $m = \delta(G)$ i neka je $l = u_1u_2 \dots u_k$ put najveće dužine u G. Čvor u_k je stepena bar m, pa sem čvora u_{k-1} ima bar još $m-1$ suseda. Svaki njegov sused mora da pripada skupu čvorova $\{u_1, u_2, \dots, u_{k-2}\}$, jer bi, u suprotnom, u G postojao put dužine veće od l. Neka su u_{i_1}, u_{i_2}, ..., $u_{i_{m-1}}$ susedi čvora u_k tako da je čvor u_{i_1} najudaljeniji od u_k na putu l. Tada je $u_{i_1}u_{i_1+1}u_{i_1+2} \dots u_k$ ciklus dužine bar m.

164. Neka je $l = u_1u_2 \dots u_k$ put najveće dužine u G. Čvor u_k je stepena bar 3, pa on, pored u_{k-1}, ima bar još dva suseda, čvorove u_i i u_j, oba iz

skupa $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-2}\}$ (videti 162, 163). Neka je čvor u_j na putu l izmedju u_i i u_k. Ukupna dužina ciklusa $u_i u_{i+1} \ldots u_j u_k$, $u_j u_{j+1} \ldots u_k$ i $u_i u_{i+1} \ldots u_j u_{j+1} \ldots u_j u_k$ jednaka je $(j-i+2)+(k-j+1)+(k-i+1) = 2(k-i)+4$, tako da je bar jedan od tih ciklusa parne dužine.

165. Neka je G graf u kome je $\Delta(G) = m$ i $\delta(G) = k$, $k < m$. Formiramo graf G_1 tako što grafu G dodamo jednu njegovu kopiju, a zatim povežemo svaki čvor stepena manjeg od m sa odgovarajućim čvorom kopije. Graf G_1 sadrži G kao indukovani podgraf, a pritom je $\Delta(G_1) = m$ i $\delta(G_1) = k+1$, jer smo svakom čvoru stepena manjeg od m povećali stepen tačno za 1. Nastavljajući isti postupak, od grafa G_1 formiramo graf G_2 za koji je $\Delta(G_2) = m$ i $\delta(G_2) = k+2$, itd. Konačno, dobićemo graf G_{m-k} za koji je $\Delta(G_{m-k}) = m$ i $\delta(G_{m-k}) = m$, tj. m-regularan graf koji sadži graf G kao indukovani podgraf.

166. Kako svaki podskup skupa X predstavlja čvor grafa G, to je $|V(G)| = 2^n$.

Neka je $\emptyset \neq Y \subset X$ proizvoljan podskup skupa X sa k elemenata. On je u G susedan sa proizvoljnim podskupom skupa $X \backslash Y$. Kako $X \backslash Y$ ima $n-k$ elemenata, to je $d_G(Y) = 2^{n-k}$.

Čvor odredjen praznim skupom je povezan sa svim ostalim čvorovima, tj. $d_G(\emptyset) = 2^n - 1$, a skup X je povezan samo sa praznim skupom, $d_G(X) = 1$.

Dakle, suma stepena čvorova grafa G je

$$2^n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k} + 1 = -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n - 1.$$

Kako je suma stepena čvorova jednaka dvostrukom broju grana grafa, to je $|E(G)| = \frac{3^n - 1}{2}$.

167. (a) Susedi proizvoljne n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ su n-torke koje se od nje razlikuju tačno na jednom mestu, tj. proizvoljan čvor grafa Q_n ima tačno n suseda. Dakle, Q_n je n-regularan graf.

(b) Broj čvorova jednak je broju n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gde je $a_i \in \{0, 1\}$, tj. broju uredjenih izbora sa ponavljanjem n elemenata iz skupa sa 2 elementa. Ukupan broj takvih izbora je 2^n.

Kako je graf n-regularan, to je zbir stepena čvorova u Q_n jednak $n \cdot 2^n$, što je jednako dvostrukom broju grana, pa je $|E(Q_n)| = n \cdot 2^{n-1}$.

(c) Podelimo sve čvorove grafa Q_n na dva skupa: neka skupu $A \subset V(Q_n)$ pripadaju sve n-torke koje imaju paran broj jedinica, a skupu $B \subset V(Q_n)$ sve n-torke sa neparnim brojem jedinica.

Susedi proizvoljne n-torke se od nje razlikuju tačno na jednom mestu, tj. razlikuju se od nje po parnosti broja jedinica. Zbog toga su A i B nezavisni skupovi, pa je Q_n bipartitan graf.

(d) Od proizvoljnog čvora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ grafa Q_n postoji put do čvora $o = (0, 0, \ldots, 0)$, koji dobijamo tako što u svakom koraku po jednu jedinicu zamenimo nulom.

Ako su $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dva čvora iz Q_n, onda je unija puteva od a do o i od b do o jedna ab-šetnja, pa zaključujemo da je Q_n povezan graf.

168. Pri promeni dve koordinate u n-torci $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in \{0, 1\}$, parnost broja jedinica se ne menja, jer broj jedinica ili ostaje isti, ili se menja za 2. Dakle, nikoja dva čvora kojima je broj jedinica različite parnosti ne mogu biti susedi.

S druge strane, od svakog čvora sa parnim brojem jedinica postoji put do čvora $(0, 0, \ldots, 0)$, koji se dobija tako što u svakom koraku po dve jedinice zamenimo nulama.

Takodje, od svakog čvora sa neparnim brojem jedinica postoji put do čvora $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, koji se dobija tako što u svakom koraku po dve jedinice zamenimo nulama, dok ne preostane samo jedna, a onda, ako je potrebno, ta jedinica i poslednja nula zamene mesta.

Iz prethodnog zaključujemo da G ima dve komponente povezanosti: skup čvorova sa parnim brojem jedinica i skup čvorova sa neparnim brojem jedinica.

169. Neka su $A \subset V(G)$ i $B \subset V(G)$ nezavisni skupovi bipartitnog grafa G, tako da je $|A| = k$ i $|B| = n - k$. Graf G može imati najviše $k(n - k)$ grana, koliko ima kompletan bipartitni graf $K_{k,n-k}$. Kvadratna funkcija $f(k) = k(n - k)$ dostiže svoj maksimum za $k = \frac{n}{2}$, pa je, zaista, $e \leq \frac{n^2}{4}$.

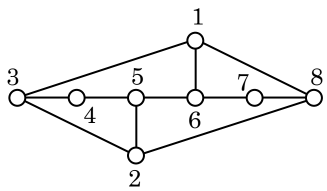
170. (a) Put P_n je bipartitan graf, pa je traženi maksimalni broj grana jednak upravo $n - 1$.

(b) Ako je n paran broj, C_n je bipartitan graf pa je traženi maksimalni broj grana jednak n.

Ako je n neparan broj, C_n nije bipartitan graf, pa je maksimalni broj grana strogo manji od n. Kako se brisanjem proizvoljne grane iz C_n dobija put sa n čvorova, koji jeste bipartitan, maksimalni broj grana u bipartitnom podgrafu u ovom slučaju jednak je $n - 1$.

(c) Najveći broj grana u bipartitnom podgrafu grafa K_n imaju kompletni bipartitni grafovi $K_{a,n-a}$. Kvadratna funkcija $f(x) = x(n-x)$ dostiže svoj maksimum za $x = \frac{n}{2}$, medjutim, a mora da bude ceo broj, tako da maksimalan broj grana $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ima bipartitni podgraf $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

171. Neka su čvorovi grafa G označeni kao na slici.



Graf G nije bipartitan, jer sadrži neparne cikluse 13456 i 25678. Brisanjem zajedničke grane $\{5,6\}$ ovih ciklusa dobijamo bipartitan podgraf, tako da je najveći broj grana u bipartitnom podgrafu jednak 10. Svaki drugi bipartitni podgraf ima manje od 10 grana, jer je, ako ne brišemo zajedničku granu $\{5,6\}$, potrebno obrisati bar dve grane da uklonimo neparne cikluse iz grafa.

172. Podelimo $V(G)$ na dva proizvoljna skupa A i B. Bipartitan podgraf H odredimo tako da je $e = \{x, y\}$ grana u H ako i samo ako je e grana u G i x i y pripadaju različitim skupovima.

Ako u H postoji čvor v takav da je $d_H(v) = d < \frac{d_G(v)}{2}$, onda čvor v prebacimo iz jednog u drugi skup. Tada će stepen čvora v biti $d_H(v) = d_G(v) - d > \frac{d_G(v)}{2}$. Ovaj proces nastavljamo sve dok ima čvorova v za koje je $d_H(v) < \frac{d_G(v)}{2}$. Graf je konačan, pa proces mora da se završi. Na kraju će za svaki čvor $v \in V(H)$ važiti $d_H(v) \geq \frac{d_G(v)}{2}$, pa će važiti i

$$e(H) = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_H(v) \geq \frac{1}{4}\sum_{v\in V} d_G(v) = \frac{e(G)}{2}.$$

173. (a) Ako je neko od ovih rastojanja jednako ∞, nije teško videti da tvrdjenje važi.

Pretpostavimo sada da postoje čvorovi u, v i w takvi da su sva rastojanja $d(u,v)$, $d(v,w)$ i $d(u,w)$ konačna i da je $d(u,v) + d(v,w) < d(u,w)$. Tada postoje uv-put P i vw-put Q takvi da im je ukupna dužina manja od $d(u,w)$. Unija puteva P i Q je uw-setnja koja sadrži uw-put dužine manje od $d(u,w)$, što nije moguće, jer je $d(u,w)$ jednako dužini najkraćeg uw-puta.

(b) Izaberimo proizvoljan čvor u iz centra grafa. Za svaki čvor $v \in V(G)$ je $d(u,v) \leq r$, gde je r radijus grafa. Dakle, za proizvoljne $v, w \in V(G)$ je $d(v,w) \leq d(u,v) + d(u,w) \leq 2r$, pa je i dijametar grafa G manji ili jednak od dvostrukog radijusa.

(c) Primer traženog grafa je ciklus C_{2d} u koji je dodata grana izmedju čvorova na rastojanju $2d - 2r$.

174. Izaberimo proizvoljan čvor $v \in V(G)$. Kako je unija grafova G i $\overline{G}$ kompletan graf, to je $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n - 1 \geq 5$. Ovo znači da je stepen čvora v u bar jednom od grafova G i $\overline{G}$ veći ili jednak 3.

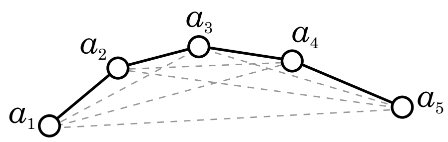
Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da je $d_G(v) \geq 3$ i neka su u_1, u_2 i u_3 susedi čvora v u grafu G. Ako neka od grana $\{u_1, u_2\}$, $\{u_1, u_3\}$ i $\{u_2, u_3\}$ pripada skupu grana grafa G, onda ona sa još dve od grana $\{v, u_1\}$, $\{v, u_2\}$ i $\{v, u_3\}$ obrazuje trougao. U suprotnom, sve tri grane pripadaju skupu grana grafa $\overline{G}$, pa $\overline{G}$ sadrži trougao odredjen čvorovima u_1, u_2 i u_3.

175. Pretpostavimo da graf G nije povezan. Tada on ima bar dve komponente povezanosti. Neka su u i v dva proizvoljna čvora iz $V(G) = V(\overline{G})$. Ako u i v pripadaju razlčvitim komponentama povezanosti grafa G, onda je $\{u, v\} \in E(\overline{G})$. Ako u i v pripadaju istoj komponenti povezanosti grafa G, onda izaberimo proizvoljan čvor w iz neke od preostalih komponenti povezanosti. Tada $(u, w) \notin E(G)$ i $(v, w) \notin E(G)$, pa su (u, w) i (v, w) grane u $\overline{G}$, tj. izmedju čvorova u i v postoji put u $\overline{G}$. Dakle, ako G nije povezan, tada je graf $\overline{G}$ povezan.

176. Dijametar grafa je veći od 3, pa postoje dva čvora takva da je najkraći put izmedju njih dužine 4. Neka je to put $l = a_1a_2a_3a_4a_5$ izmedju čvorova a_1 i a_5. Podgraf indukovan ovim čvorovima je put l.

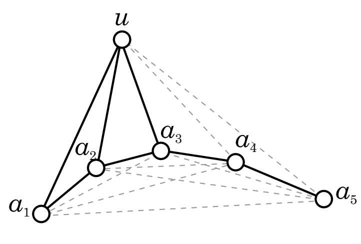
Neka su u i v proizvoljni čvorovi iz $V(G) = V(\overline{G})$. Razlikujemo tri slučaja:

1° $u, v \in V(l) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$



Ako u i v nisu susedi na putu l, onda je $\{u, v\}$ grana u $\overline{G}$. Ako jesu susedi, onda u $\overline{G}$ postoji put od u do v preko nekog od čvorova a_1, $\ldots$, a_5 (vidi sliku).

2° $v \in V(l)$, $u \notin V(l)$

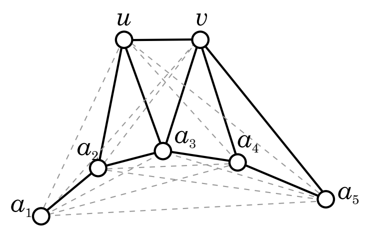


Čvor u može biti susedan sa najviše 3 čvora iz $V(l)$, jer bi u suprotnom put od a_1 do a_5 preko čvora u bio kraći od 4. Ako je v jedan od čvorova iz $V(l)$ koji nije sused sa u, onda je $\{u, v\} \in \overline{G}$. U suprotnom, od u do v postoji put u $\overline{G}$ preko nekog od čvorova sa kojima u nije sused u G.

3° $u, v \notin V(l)$

Ako $\{u, v\} \notin E(G)$, onda je $\{u, v\} \in E(\overline{G})$.

Neka je $\{u, v\} \in E(G)$. Od čvorova u i v do čvorova iz $V(l)$ mogu da postoje grane do najviše 4 čvora (vidi sliku), jer, u svakom drugom slučaju, l ne bi bio najkraći put od a_1 do a_5.



U svakom slučaju, u $V(l)$ postoji čvor a takav da važi $\{u, a\}$, $\{v, a\} \notin E(G)$. Tada u $\overline{G}$ postoji put od u do v preko a.

Dakle, za proizvoljne čvorova u i v u grafu $\overline{G}$ postoji put dužine najviše 2, pa je i njegov dijametar najviše 2.

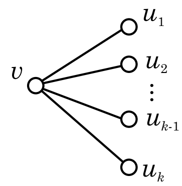
177. Neka je graf G sa n čvorova samokomplementaran. Kako postoji izomorfizam izmedju G i $\overline{G}$, to ova dva grafa moraju da imaju isti broj grana. Unija grafova G i $\overline{G}$ je kompletan graf K_n, pa on mora da ima paran broj grana. Broj grana u K_n je $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, a da bi to bio paran broj, jedan od brojeva n i $n - 1$ mora da bude deljiv sa 4. Dakle, $n \equiv_4 0$ ili $n \equiv_4 1$.

178. Podelimo čvorove grafa G u tri podskupa:

$$\begin{aligned} V^{<} &= \left\{ v \in V(G) : \, d_G(v) < \frac{n-1}{2} \right\} \\ V^{=} &= \left\{ v \in V(G) : \, d_G(v) = \frac{n-1}{2} \right\} \\ V^{>} &= \left\{ v \in V(G) : \, d_G(v) > \frac{n-1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Neka je f izomorfizam izmedju G i $\overline{G}$. Ako je $d_G(v)$ stepen čvora v u grafu G, njegov stepen u grafu $\overline{G}$ jednak je $d_{\overline{G}}(v) = n - 1 - d_G(v)$. Kako stepeni čvora v u G i njegove slike $f(v)$ u $\overline{G}$ moraju da budu jednaki, zaključujemo da f slika skup $V^{<}$ u $V^{>}$ (a takodje slika i skup $V^{>}$ u $V^{<}$), pa važi da je $|V^{<}| = |V^{>}|$. S obzirom da G ima neparan broj čvorova, vidimo da skup $V^{=}$ mora da ima neparan broj čvorova, pa samim tim, ne može da bude prazan.

179. Neka je $v \in V(G)$ čvor maksimalnog stepena u G, $d_G(v) = k$. Neka su u_1, u_2, …, u_k susedi čvora v.

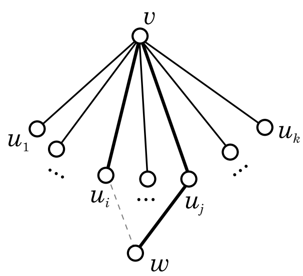


Kako svaka dva od čvorova u_1, u_2, ..., u_k imaju čvor v kao zajedničkog suseda, to su svaka dva od njih medjusobno različitih stepena.

Kako je v čvor sa maksimalnim stepenom, to za svaki čvor u_i mora da važi $1 \leq d_G(u_i) \leq k$. Uz to su stepeni ovih k čvorova medjusobno različiti, pa mora da postoji čvor svakog stepena izmedju 1 i k.

180. Tvrdjenje je trivijalno za $n < 4$. Pretpostavimo zato da je $n \geq 4$. Neka je v čvor maksimalnog stepena u G. Dokazaćemo da je v susedan sa svim ostalim čvorovima.

Neka su čvorovi u_1, u_2, ..., u_k susedi čvora v. Pretpostavimo da postoji neprazan skup čvorova $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$, takvih da ni jedan od njih nije sused čvora v. Pošto je G povezan graf, postoje t i j tako da su čvorovi $w = w_t$ i u_j susedni. Čvor u_j ne može biti susedan sa svim čvorovima iz skupa $\{u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_k\}$, jer bi tada imao veći stepen od v. Dakle, postoji $i \in \{1, 2, \ldots\} \setminus \{j\}$ takav da u_i nije sused čvora u_j.



Sada čvorovi v, u_i, u_j i w u grafu G indukuju podgraf izomorfan sa P_4 ili C_4, u zavisnosti od toga da li su čvorovi w i u_i susedni, što je kontradikcija. Prema tome, skup W je prazan i čvor v je povezan sa svim ostalim čvorovima grafa G.

181. Situaciju iz zadatka možemo da predstavimo grafom tako što svaku osobu predstavimo čvorom, a poznanstvo osoba granom izmedju odgovarajućih čvorova. Ovako pridruženi graf ima osobinu da medju proizvoljna četiri čvora postoji čvor koji je susedan sa preostala tri.

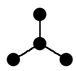
Slično kao u zadatku 180, izaberimo čvor v najvećeg stepena i označimo skup njegovih suseda sa $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Ako pretpostavimo da v nije susedan sa svim čvorovima grafa G, tada na isti način kao u zadatku 180 zaključujemo da postoje čvor w i susedi u_i i u_j čvora v takvi da je $\{w, u_j\} \in E(G)$ i $\{w, v\}, \{w, u_i\}, \{u_i, u_j\} \notin E(G)$. Medjutim, tada medju čvorovima w, v, u_i i u_j ne postoji čvor susedan sa ostala tri, što je kontradikcija. Dakle, čvor v je susedan sa svim ostalim čvorovima.

182. Kako se svaka osoba rukovala sa različitim brojem osoba, to znači da za svako $i \in \{0, 1, \ldots, 2n-2\}$ postoji osoba O_i koja se rukovala tačno i puta.

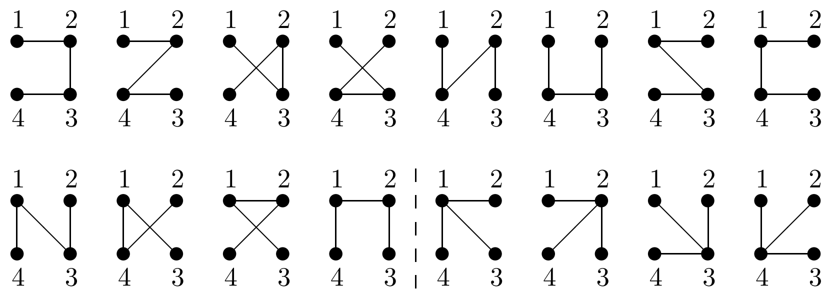
Posmatrajmo najpre osobu O_{2n-2}. Ta osoba se rukovala sa svima, sem sa svojim bračnim drugom. ovo znači da sve ostale osobe imaju bar po jedno rukovanje, pa zaključujemo da su osoba O_0 i osoba O_{2n-2} u braku.

Posmatrajmo sada osobu O_{2n-3}. Ona se nije rukovala samo sa O_0 i svojim bračnim drugom. Dakle, sve osobe koje su se rukovale sa O_{2n-3} imaju bar po dva rukovanja. Znači, osobe O_1 i O_{2n-3} su u braku.

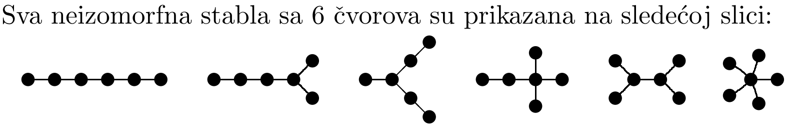
Nastavljanjem ovakvog razmatranja možemo da zaključimo da su za svako $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ osobe O_i i O_{2n-2-i} u braku. Na kraju preostaje osoba O_{n-1} koja nema svoj par, pa ta osoba može da bude jedino žena Prof. Mozgića.

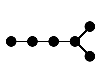
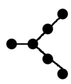
183. Stabla sa četiri čvora mogu biti jednog od sledeća dva oblika: put P_4  ili zvezda $K_{1,3}$  .

U prvom slučaju svakom stablu odgovaraju po dve permutacije brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$: 1234 i 4321, 1243 i 3421, 1324 i 4231, 1342 i 2431, 1423 i 3241, 2134 i 4312, 2143 i 3412, 2314 i 4132, 2413 i 3142, 3124 i 4213, 3214 i 4123, dok je u drugom slučaju jedino bitno koji od četiri čvora ima stepen 3. Stoga je ukupan broj ovih grafova jednak $\frac{4!}{2} + 4 = 12 + 4 = 16$ i oni su predstavljeni na sledećoj slici:



Sva neizomorfna stabla sa 6 čvorova su prikazana na sledećoj slici:



184. Grafovi  i  iz prethodnog zadatka imaju iste stepene čvorova (3,2,2,1,1,1), ali nisu izomorfni, što se može pokazati na neki od

sledećih načina:

1. Dijametar prvog grafa je 4, a drugog grafa je 3 (ekscentricitet svakog čvora stepena 1 u prvom grafu je 4, a u drugom je 3).
2. U prvom grafu su čvorovi stepena 2 susedni, a u drugom nisu.
3. U prvom grafu čvor stepena 3 ima jednog suseda stepena 1, a u drugom grafu čvor stepena 3 ima dva suseda stepena 1.
4. U prvom grafu postoje dva čvora stepena 1 koja su na rastojanju 2, a u drugom grafu su svaka dva čvora stepena 1 na rastojanju 3.

Prema tome, uslov da dva grafa imaju iste stepene čvorova je potreban, ali ne i dovoljan uslov za postojanje izomorfizma izmedju tih grafova.

185. Neka su v_1, v_2, $\dots$, v_n čvorovi stabla T uredjeni tako da važi $d_T(v_1) \leq d_T(v_2) \leq \dots \leq d_T(v_n) = k$. Kako stablo ima $n-1$ granu, to važi

$$\sum_{i=1}^{n} d_T(v_i) = 2n - 2.$$

S druge strane, pretpostavimo da T ima manje od k listova: tada je $d_T(v_k) \geq 2$ i važi

$$\sum_{i=1}^{n} d_T(v_i) \geq (k-1) \cdot 1 + (n-k) \cdot 2 + k = 2n - 1,$$

što je kontradikcija. Prema tome, T ima bar k listova.

Napomena: Stablo za koje važi $\Delta(T) = k$ i ima tačno k visećih čvorova naziva se *zvezdasto*: ono ima jedan čvor stepena k, dok ostali čvorovi imaju stepen 1 ili 2.

186. Pokazaćemo opštije tvrdjenje: ako je $d_1, d_2, \dots, d_s, 1, \dots, 1$ nerastući niz stepena čvorova stabla T, tada je broj čvorova jednak $2 - s + \sum_{i=1}^{s} d_i$.

Pretpostavimo da je broj listova jednak t. Tada je broj čvorova stabla jednak $n = s + t$, a kako je broj grana u stablu jednak $n-1$, imamo da je

$$\sum_{i=1}^{s} d_i + t = 2(s+t) - 2,$$

odakle je $t = 2 - 2s + \sum_{i=1}^{s} d_i$ i $n = 2 - s + \sum_{i=1}^{s} d_i$.

Sada se vratimo na problem iz zadatka: stablo T ima tačno po jedan čvor stepena $2, 3, \dots, k$, pa prethodna formula daje

$$n = 2 - (k-1) + \sum_{i=2}^{k} i = 3 - k + \frac{k(k+1)}{2} - 1 = \frac{k^2 - k + 4}{2}.$$

187. Neka je $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ najduži put u stablu T. Tada je v_1 list (u suprotnom bi v_1 bio povezan sa još jednim čvorom v_0 čijim bi se dodavanjem put P mogao produžiti). Pošto je čvor v_2 stepena bar 3, to postoji još jedan njegov sused w, koji ne pripada najdužem putu P. Pretpostavimo da w nije list. Tada postoji čvor u susedan sa w i različit od v_2, pa je put $P_1 = \{u, w, v_2, \ldots, v_k\}$ dužine $k+1$, što je kontradikcija. Znači čvor w je list, pa je $\{w, v_1\}$ traženi par listova sa zajedničkim susedom.

188. Ako sumiramo sve stepene čvorova u grafu, dobijamo dvostruki broj grana jer svaku granu brojimo dva puta (u svakom njenom kraju), tj.

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

$\Rightarrow$: Iz jedne od ekvivalentnih definicija stabla imamo da stablo ima $n-1$ granu, što povlači

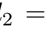
$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n - 2.$$

$\Leftarrow$: Ovaj smer ćemo pokazati matematičkom indukcijom po broju čvorova datog stabla.

Baza indukcije: U stablu K_2 oba čvora imaju stepen 1 i važi $1+1 = 2\cdot2-2$.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdjenje važi za graf sa $n = k$, $k \geq 2$, čvorova, tj. da za niz prirodnih brojeva $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$ za koje je $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = 2k - 2$ postoji stablo sa k čvorova čvorova čiji su stepeni $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

Indukcijski korak: Neka je $n = k+1$ i neka važi $d_1+d_2+\ldots+d_k+d_{k+1} = 2k$. Tada po Dirihleovom principu postoje indeksi i i j tako da je $d_i \leq \frac{2k}{k+1}$ i $d_j \geq \frac{2k}{k+1}$, pa kako je $k \geq 2$ i d_i i d_j su prirodni brojevi, to važi $d_i = 1$ i $d_j \geq 2$. Bez gubitka opštosti možemo uzeti da je $i = k+1$ i $j = k$. Neka je sada $d'_m = d_m$ za $m = 1, 2, \ldots, k-1$ i $d'_k = d_k - 1$. Za niz prirodnih brojeva $(d'_1, d'_2, \ldots, d'_k)$ važi $d'_1 + d'_2 + \ldots + d'_k = 2k - 2$, pa stoga, po indukcijskoj pretpostavci, postoji stablo T' čiji su stepeni čvorova jednaki $d'_1, d'_2, \ldots, d'_k$. Neka je v čvor stabla T' stepena d'_k. Tada stablo T koje dobijamo od T' dodavanjem novog čvora w i spajanjem čvorova v i w ima stepene čvorova $d_1, d_2, \ldots, d_k, d_{k+1}$.

Napomena: Primetimo da se smer dokaza $\Leftarrow$ ne može interpretirati kao tvrdjenje "ako za brojeve $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ važi $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n - 2$ onda je graf stablo". Uzgred, to nije tačno; jedan od kontraprimera je sledeći: stepenima čvorova $d_1 = d_2 = 1$, $d_3 = d_4 = d_5 = 2$ odgovaraju i stablo  i nepovezan graf ). Ispravna interpretacija za $\Leftarrow$ glasi: "za brojeve $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ za koje je $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2n - 2$ postoji stablo sa tim nizom stepena čvorova".

189. U proizvoljnom grafu G sa n čvorova, zbir stepena čvorova jednak je

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{i=1}^{n-1} i p_i,$$

a očigledno važi i

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i = n.$$

Ako je G stablo, njegov broj grana je $n-1$, tako da dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n-1} ip_i = 2(n-1) = 2\sum_{i=1}^{n-1} p_i - 2,$$

što daje traženu jednakost

$$\sum_{i=1}^{n-1} (2-i)p_i = 2,$$

odnosno

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Napomena: Ovaj zadatak se može iskoristiti da pokažemo da u svakom stablu sa bar dva čvora postoje bar dva lista, tj. da je $p_1 \geq 2$. Takodje odmah sledi da je jedino stablo sa tačno dva lista, put P_n ($p_1 = 2$, a $p_3 = \ldots = p_{n-1} = 0$).

190. Ako nacrtamo rodoslov kralja Šongabonge, vidimo da on predstavlja stablo u kome čvor koji odgovara kralju ima stepen 4, dok čvor koji odgovara nekom kraljevom potomku ima stepen za jedan veći od broja njegovih sinova: po jedna grana za svakog sina i još jedna grana za njegovog oca.

    Ako sada sa p_i označimo broj čvorova stepena i u rodoslovu, onda vidimo da je $p_3 = 15$ i $p_4 = 10 + 1 = 11$. Kako rodoslov sadrži samo čvorove stepena 1, 3 ili 4, na osnovu zadatka 189 imamo da je $p_1 = p_3 + 2p_4 + 2 = 39$, pa je broj čvorova u stablu jednak $n = 65$, a kako je tu računat i kralj Šongabonga, dobijamo da je on imao 64 muških potomaka.

191. a) $\Rightarrow$: Šuma je graf bez ciklusa, pa ni bilo koji njen indukovan podgraf nema ciklusa, a njegove komponente povezanosti su stabla. Ako neka komponenta ima bar dva čvora, onda ona sadrži čvor stepena 1, a u suprotnom ona sadrži samo jedan čvor stepena 0.

    $\Leftarrow$: Neka svaki indukovani podgraf grafa G sadrži čvor v stepena $d(v) \leq 1$. Pretpostavimo suprotno, da G nije šuma. Tada G ima bar jedan ciklus, recimo C. U podgrafu grafa G indukovanom skupom čvorova ciklusa C svaki čvor v ima stepen $d(v) \geq 2$, što je kontradikcija.

    b) $\Rightarrow$: Povezani podgraf T šume S je povezan graf bez ciklusa, tj. stablo. Ako T nije indukovani podgraf, u šumi S postoji grana e koja spaja čvorove stabla T, a da pritom ne pripada $E(T)$. Tada grana e zajedno sa jedinstvenim putem izmedju njenih krajeva u stablu T formira ciklus u šumi S, što je kontradikcija. Stoga je T indukovani podgraf.

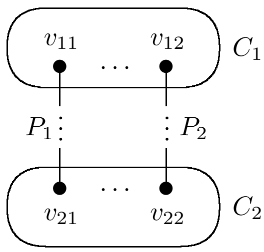
$\Leftarrow$: Neka je S graf u kome je svaki povezani podgraf indukovani podgraf. Ako S sadrži ciklus C, tada je za proizvoljnu granu e ciklusa C, podgraf $C - e$ povezan, ali nije indukovan. Stoga S ne sadrži cikluse, pa je samim tim šuma.

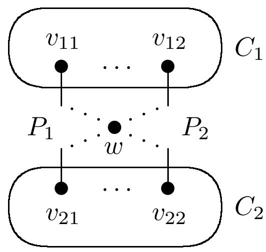
192. $\Rightarrow$: Neka je G stablo. Tada izmedju svaka dva čvora u i v postoji jedinstven put $u = a_1, a_2, \ldots, a_k = v$. Dodavanjem grane $\{u, v\}$ formira se tačno jedan ciklus $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1$. Stablo G nije izomorfno sa K_n, jer G ima $n - 1$ granu, K_n ima $\binom{n}{2}$ grana i $\binom{n}{2} > n - 1$ za $n \geq 3$.

    $\Leftarrow$: Ako graf G nije povezan, onda dodavanjem grane izmedju bilo koja dva čvora iz različitih komponenti ne nastaje nijedan ciklus, što je suprotno pretpostavci. Znači da je G povezan graf.

    Kako G nije izomorfan sa kompletnim grafom K_n, to postoje dva čvora u i v koja nisu susedna u G. Dodavanjem grane $\{u, v\}$ u G nastaje tačno jedan ciklus, koji mora da sadrži granu $\{u, v\}$ i put izmedju u i v u G. Ovo, ujedno, znači da sam graf G ne sadrži cikluse, pa zaključujemo da je G stablo.

193. Pretpostavimo suprotno da G_3 nije povezan. Tada su neke dve njegove komponente, C_1 i C_2, povezane putem P_1 u G_1, a putem P_2 u G_2 (putevi P_1 i P_2 nisu isti jer bi tada u G_3 komponente C_1 i C_2 činile istu komponentu zajedno sa tim putem). Označimo sa v_{ij} čvor iz komponente C_i iz koga kreće put P_j. Sada imamo dva slučaja.





1° Putevi P_1 i P_2 nemaju zajedničkih čvorova van komponenti C_1 i C_2. Tada imamo ciklus

$$v_{11}(C_1)v_{12}(P_2)v_{22}(C_2)v_{21}(P_1)v_{11},$$

gde $u(C)v$ označava put od u do v u podgrafu C.

2° Putevi P_1 i P_2 imaju zajednički čvor w. Tada imamo ciklus

$$v_{11}(C_1)v_{12}(P_2)w(P_1)v_{11}.$$

Medjutim, oba slučaja su nemoguća, jer je polazni graf stablo i on ne sadrži cikluse. Prema tome, graf G_3 mora da bude povezan.

194. Dokaz se sprovodi matematičkom indukcijom po broju čvorova n stabla T.

Baza indukcije: Za $n = 1$ stablo T se sastoji od jednog čvora i sva njegova podstabla takodje sadrže taj čvor, pa imaju neprazan presek.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $n = k$.

Indukcijski korak: Neka je $n = k + 1$. Stablo T ima bar dva lista i neka je v jedan od njegovih listova, a u njegov sused u T. Ako sva stabla iz $\mathcal{T}$ sadrže čvor v onda je ispunjeno tvrdjenje zadatka. Pretpostavimo da neko podstablo, npr. S, ne sadrži v. Ukoliko bi presek neka dva podstabla iz $\mathcal{T}$ sadržao samo čvor v, bez čvora u, tada bi jedno od ta dva podstabla bilo samo čvor v, ali tada ono ne bi imalo presek sa stablom S! Stoga presek proizvoljna dva podstabla iz $\mathcal{T}$ sem v sadrži i u. Ako obrišemo čvor v iz stabla T i svakog podstabla iz skupa $\mathcal{T}$ dobijamo stablo T' i skup $\mathcal{T}'$ podstabala stabla T', takav da svaka dva podstabla iz $\mathcal{T}'$ imaju neprazan presek. Kako T' ima k čvorova, po indukcijskoj pretpostavci dobijamo da je $\cap_{S' \in \mathcal{T}'} S' \neq \emptyset$, pa je tada i $\cap_{S \in \mathcal{T}} S \neq \emptyset$.

195. Dokaz se sprovodi matematičkom indukcijom po broju k.

Baza indukcije: Za $k = 1$ šuma G ima tačno 2 čvora neparnog stepena. Kako svako stablo ima bar dva lista, zaključujemo da šuma G ima samo jednu komponentu povezanosti, koja ima tačno dva lista i, prema tome, predstavlja put P. Sada je $E(G) = E(P)$.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $k = m$.

Indukcijski korak: Neka je $k = m + 1$. Svaka komponenta povezanosti ima paran broj čvorova neparnog stepena. Uočimo dva proizvoljna čvora u i v neparnog stepena iz iste komponente povezanosti. Kako je G šuma, ta komponenta je stablo, pa su u i v povezani jedinstvenim putem P_{m+1}. Ako obrišemo put P_{m+1}, stepeni čvorova u i v se smanjuju za 1, dok se stepeni unutrašnjih čvorova puta P_{m+1} smanjuju za 2. Tako dobijamo šumu G' sa tačno $2m$ čvorova neparnog stepena, a ona po indukcijskoj hipotezi može da se razbije na m granski disjunktnih puteva P_1, P_2, $\ldots$, P_m, te stoga šuma G može da se razbije na $m + 1$ granski disjunktnih puteva, tako da je $E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \ldots \cup E(P_m) \cup E(P_{m+1})$.

196. Dokaz se sprovodi matematičkom indukcijom po broju grana k stabla T.

Baza indukcije: Za $k = 0$ svaki graf G sadrži kao podgraf K_1.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $n = k$, tj. da za svako stablo S sa n grana i svaki graf G sa $\delta(G) \geq n$ postoji podgraf grafa G izomorfan sa stablom S.

Indukcijski korak: Neka je T stablo sa $n = k + 1$ grana. Neka je v jedan od listova stabla T i neka je u sused lista v u T. Stablo $T' = T - v$ ima k grana, pa po indukcijskoj hipotezi, graf G sadrži podgraf H' izomorfan sa T', jer je $\delta(G) \geq k + 1 > k$. Neka je x čvor iz H' koji odgovara (u smislu izomorfizma) čvoru u stabla T'. Kako T' ima tačno k čvorova različitih od u, čvor x će u grafu G imati suseda y koji ne pripada podgrafu H'. Dodavanjem grane xy (koja odgovara grani uv) i čvora y podgrafu H' dobijamo podgraf H koji je izomorfan sa stablom T.

197. Dokaz se sprovodi matematičkom indukcijom po broju listova k stabala S i T. Za traženi izomorfizam važi $f(x_i) = y_i$.

Baza indukcije: Za $k = 2$ stabla S i T su putevi. Kako je $d_S(x_1, x_2) = d_T(y_1, y_2) = d$, stabla S i T su izomorfna sa putem P_{d+1} i postoji izomorfizam f koji preslikava listove $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdjenje važi za svaka dva stabla S i T sa $n = k$ listova.

Indukcijski korak: Neka su S i T stabla sa $n = k + 1$ listova. Neka je x_{k+1} list stabla S i neka je v najbliži čvor listu x_{k+1} u S koji ima stepen ≥ 3. Slično, neka je y_{k+1} list stabla T i neka je w najbliži čvor listu y_{k+1} u T koji ima stepen ≥ 3.

Ako iz S obrišemo put $x_{k+1}, \ldots, v$, tako da ostavimo čvor v, dobijamo stablo S' sa k listova. Naime, stepen čvora v je smanjen za 1, pa je njegov stepen u S' bar 2 i on ne može da bude list. Slično, ako iz T obrišemo put $y_{k+1}, \ldots, w$, tako da ostavimo čvor w, dobijamo stablo T' sa k listova. Kako je $d_{S'}(x_i, x_j) = d_S(x_i, x_j)$ i $d_{T'}(y_i, y_j) = d_T(y_i, y_j)$, za svako $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, po indukcijskoj hipotezi dobijamo da su stabla S' i T' izomorfna i da postoji izomorfizam $f' \colon S' \mapsto T'$, za koji je $f'(x_i) = y_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Uočimo dva lista u stablu S, različita od x_{k+1}, tako da se čvor v nalazi na jedinstvenom putu koji povezuje te listove u S. Bez gubitka opštosti, možemo pretpostaviti da su to listovi x_1 i x_2. Tada je

$$
\begin{aligned}
d(v, x_{k+1}) &= \frac{d(x_1, x_{k+1}) + d(x_2, x_{k+1}) - d(x_1, x_2)}{2} \\
&= \frac{d(y_1, y_{k+1}) + d(y_2, y_{k+1}) - d(y_1, y_2)}{2} = d(w, y_{k+1}) \\
d(v, x_1) &= \frac{d(x_1, x_{k+1}) + d(x_1, x_2) - d(x_2, x_{k+1})}{2} \\
&= \frac{d(y_1, y_{k+1}) + d(y_1, y_2) - d(y_2, y_{k+1})}{2} = d(w, y_1) \\
d(v, x_2) &= \frac{d(x_2, x_{k+1}) + d(x_2, x_1) - d(x_1, x_{k+1})}{2} \\
&= \frac{d(y_2, y_{k+1}) + d(y_2, y_1) - d(y_1, y_{k+1})}{2} = d(w, y_2).
\end{aligned}
$$

Iz prve jednačine dobijamo da su putevi $v, \ldots, x_{k+1}$ i $w, \ldots, y_{k+1}$ iste dužine s, a iz druge i treće dobijamo da se čvor v preslikava u čvor w pomoću izomorfizma f. Ako sada u cvorovima v i w izomorfnih stabala S' i T', redom, "zalepimo" puteve $v, \ldots, x_{k+1}$ i $w, \ldots, y_{k+1}$, redom, dobijamo i da su stabla S i T izomorfna, kao i da se izomorfizam f može proširiti tako da je $f(x_{k+1}) = y_{k+1}$.

198. Neka graf G ima n čvorova. Graf $T - e$ je nepovezan i ima tačno dve komponente povezanosti: označimo ih sa T_1 i T_2. S druge strane, graf $T' + e$ sadrži tačno jednu konturu C'. Kontura C' sadrži granu e i, samim tim, sadrži čvor iz T_1 i čvor iz T_2. Stoga, obilazeći konturu C' počev od onog kraja grane e u T_1 u smeru od drugog kraja grane e, u nekom trenutku moramo doći do grane čiji je jedan kraj u T_1, a drugi u T_2. Označimo takvu granu sa e'.

    Graf $T + e'$ takodje sadrži tačno jednu konturu C, koja sadrži granu e'. Sada, graf $T - e + e'$ je povezan: ukoliko put P izmedju dva proizvoljna čvora u, v u stablu T ne koristi granu e, onda se put P nalazi i u $T - e + e'$; ukoliko put P koristi granu e, zamenimo granu e putem $C \setminus \{e\}$. Kako $T - e + e'$ ima $n - 1$ granu, zaključujemo da je $T - e + e'$ stablo.

    Takodje, graf $T' - e' + e$ je povezan: ukoliko put P' izmedju dva proizvoljna čvora u, v u stablu T' ne koristi granu e', onda se put P nalazi i u $T' - e' + e$; ukoliko put P koristi granu e', zamenimo granu e' putem $C' \setminus \{e'\}$. Kako $T' - e' + e$ takodje ima $n - 1$ granu, zaključujemo da je i $T' - e' + e$ stablo.

    Oba stabla su razapinjuća, jer sadrže sve čvorove grafa G.

199. Broj komponenti povezanosti povezanog grafa G jednak je 1, pa je njegov ciklomatički broj $c(G)$ jednak $|E(G)| - |V(G)| + 1$.

    a) Broj grana grafa K_n jednak je $\binom{n}{2}$, pa je $c(K_n) = \binom{n}{2} - n + 1 = \binom{n-1}{2}$.

    b) Broj grana grafa $K_{m,n}$ jednak je mn, pa je $c(K_{m,n}) = mn - (m+n) + 1 = (m-1)(n-1)$.

    c) Broj grana regularnog grafa stepena 3 sa n čvorova jednak je $\frac{3n}{2}$, pa je njegov ciklomatički broj jednak $\frac{3n}{2} - n + 1 = \frac{n}{2} + 1$.

200. Neka su $C_1, C_2, \ldots, C_k$ komponente povezanosti grafa G. Za skupove grana i čvorova grafa G važi da je

$$E(G) = \cup_{i=1}^{k} E(C_i) \qquad \text{i} \qquad V(G) = \cup_{i=1}^{k} V(C_i).$$

    Dalje je ciklomatički broj komponente C_i jednak $c(C_i) = |E(C_i)| - |V(C_i)| + 1$, pa imamo da je ciklomatički broj grafa G jednak

$$\begin{aligned} c(G) &= |E(G)| - |V(G)| + k \\ &= \sum_{i=1}^{k} |E(C_i)| - \sum_{i=1}^{k} |V(C_i)| + k \\ &= \sum_{i=1}^{k} (|E(C_i)| - |V(C_i)| + 1) = \sum_{i=1}^{k} c(C_i). \end{aligned}$$

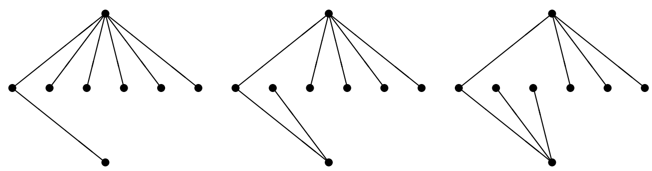
201. Pošto graf H sadrži granu iz svake konture grafa G, graf $G - H$ ne sadrži nijednu konturu, pa je on šuma. Stoga je njegov broj grana jednak $n - q$, gde je q broj komponenti grafa $G - H$. Jasno, mora biti $q \geq p$ i sada imamo da je broj grana u H bar $m - (n - q) \geq m - n + p$.

202. U ovom zadatku ćemo rešiti opštiji problem—umesto za graf $K_{2,6}$ sa slike, zadatak ćemo rešiti za kompletan bipartitni graf $K_{2,n}$. Čvorove u delu sa 2 čvora označićemo sa a i b, a čvorove u delu sa n čvorova sa $1, 2, \ldots, n$.

U proizvoljnom razapinjućem stablu T čvorovi a i b spojeni su tačno jednim putem: zbog toga postoji tačno jedan čvor i tako da stablo T sadrži grane $\{a, i\}$ i $\{b, i\}$. Za svaki čvor $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ važi da se tačno jedna od grana $\{a, j\}$, $\{b, j\}$ nalazi u T. Neka je k_T broj onih čvorova j za koje se grana $\{a, j\}$ nalazi u T. Tada ima $n-1-k_T$ čvorova j za koje se grana $\{b, j\}$ nalazi u T.

Kada tražimo broj neizomorfnih razapinjućih stabala, primetimo da su razapinjuća stabla T i T' izomorfna ako i samo ako je $k_T = k_{T'}$ ili $k_T = n-1-k_{T'}$. Zbog toga neizomorfnih razapinjućih stabala ima koliko i mogućih vrednosti za k_T, tj. vrednosti 0, 1, ..., $[(n-1)/2]$. Njihov broj je stoga jednak $[(n+1)/2]$.

Za $n = 6$ sva $3 = [7/2]$ neizomorfna razapinjuća stabla su:



Kada tražimo ukupan broj razapinjućih stabala, primetimo da je svako razapinjuće stablo T odredjeno izborom čvora i takvog da se obe grane $\{a, i\}$ i $\{b, i\}$ nalaze u T i za svaki od preostalih čvorova j izborom da li se u stablu T nalazi grana $\{a, j\}$ ili $\{b, j\}$. Zbog toga je ukupan broj razapinjućih stabala jednak $n \cdot 2^{n-1}$. Za $n = 6$ svih razapinjućih stabala ima $2^5 \cdot 6 = 192$.

Inače, ovaj broj smo mogli da dobijemo i koristeći teoremu o matricama i stablima. Ako u ovu teoremu uvrstimo $s = t = 1$, tada je broj svih razapinjućih stabala jednak

$$t(K_{2,n}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & n \end{vmatrix},$$

gde je determinanta reda $(n+1) \times (n+1)$, tj. $t(K_{2,n}) = D_{n+1}$. Ako determinantu ovog oblika, reda $m \times m$, razvijemo po prvoj koloni, a zatim po prvoj vrsti dobijamo rekurentnu jednačinu

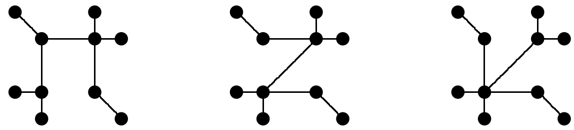
$$D_m = 2D_{m-1} - 2^{m-2}, \quad \text{uz početni uslov } D_2 = 2n - 1$$

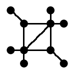
i njeno rešenje je $D_m = 2^{m-2}(2n+1-m)$. Za $m = n+1$ dobijamo da je broj svih razapinjućih stabala grafa $K_{2,n}$ jednak

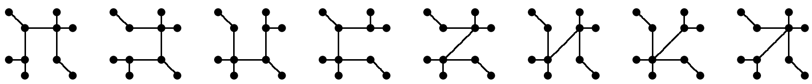
$$t(K_{2,n}) = D_{n+1} = 2^{n-1} \cdot n.$$

203. Kako je ciklomatički broj ovog grafa jednak $\nu(G) = 11 - 10 + 1 = 2$, da bi dobili stablo potrebno je izbaciti 2 grane.

a) Postoje 3 neizomorfna razapinjuća stabla:



b) Kako razapinjuće stablo mora da sadrži sve viseće grane u grafu, to je broj svih razapinjućih stabala grafa  jednak broju razapinjućih stabala grafa , a njih ima tačno 8:



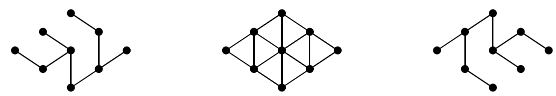
204. Odredimo broj $t(K_n, e)$ razapinjućih stabala kompletnog grafa K_n koja sadrže datu granu e. Zbog postojanja automorfizma koji svaku granu preslikava u proizvoljnu drugu granu, taj broj je jednak za svaku granu $e \in E(K_n)$. Tada je

$$\sum_{e \in K_n} t(K_n, e) = (n-1) \cdot t(K_n),$$

jer se svako razapinjuće stablo javlja tačno $n-1$ puta u sumi na levoj strani, po jednom za svaku svoju granu, a svih razapinjućih stabala, po Kejlijevoj teoremi, ima n^{n-2}. Kako K_n ima $\binom{n}{2}$ grana dobijamo da je $\binom{n}{2} t(K_n, e) = (n-1) \cdot n^{n-2}$, a odatle imamo da je $t(K_n, e) = 2 \cdot n^{n-3}$. Stoga je broj razapinjućih stabala kompletnog grafa iz koga je obrisana grana e jednak

$$t(K_n - e) = t(K_n) - t(K_n, e) = (n-2)n^{n-3}.$$

205. Dati graf u sredini slike može se predstaviti kao unija izomorfnih granski-disjunktnih razapinjućih stabala. Izomorfizam je direktna posledica činjenice da su ta dva stabla centralno simetrična.



206. Neka je G graf sa n čvorova od kojih je a stepena 4 i b stepena 3. Tada je $a+b=n$. Kako graf G može da se razloži na dva disjunktna razapinjuća stabla, dobijamo da graf G ima $m=2(n-1)=2n-2$ grana. Ako svaku granu brojimo dva puta (po jednom za svaki njen kraj), dobijamo da je $a\cdot 4+b\cdot 3=2m=4n-4$. Tako smo dobili sistem

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & n \\ 4a & + & 3b & = & 4n-4\ , \end{array}$$

čija su rešenja $a=n-4$ i $b=4$. Dakle, čvorova stepena 3 ima tačno 4.

207. Tvrdjenje zadatka neposredno sledi, ako dokažemo da je za svako razapinjuće stablo T grafa G, broj grana čiji su krajevi u različitim klasama bar $s-1$. Proglasimo sada skupove V_i za čvorove i formirajmo graf T^* na skupu čvorova $\{V_1,V_2,\ldots,V_s\}$, gde su čvorovi V_i i V_j susedni u T^* ako i samo ako postoji grana u stablu T čiji je jedan kraj u skupu V_i, a drugi u skupu V_j.

Dokazaćemo da je graf T^* povezan. Neka su V_i i V_j proizvoljni čvorovi grafa T^* i neka su $u\in V_i$ i $v\in V_j$ proizvoljni elementi ovih skupova. u i v su čvorovi grafa G, odnosno njegovog razapinjućeg stabla T, pa u T postoji jedinstveni put P: $u=p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_k=v$ koji povezuje čvorove u i v. Pomoću puta P možemo da formiramo put P^* izmedju čvorova V_i i V_j u T^* na sledeći način: za svaki čvor p_i neka je V_{q_i} takvo da $p_i\in V_{q_i}$. Sada put P^* dobijamo iz niza $V_i=V_{q_0},\ V_{q_1},\ \ldots,\ V_{q_k}=V_j$ tako što iz svakog niza uzastopnih ponavljanja istog skupa ostavimo samo jedno njegovo pojavljivanje.

Sada, kako je T^* povezan graf sa s čvorova, on mora da sadrži bar $s-1$ granu. Svakoj grani $\{V_i,V_j\}$ u grafu T^* odgovara bar jedna grana u stablu T čiji je jedan kraj u V_i, a drugi u V_j. Na osnovu toga sledi da stablo T sadrži bar $s-1$ granu čiji su krajevi u različitim klasama.

208. Dokaz ide matematičkom indukcijom po n. Za $n=1,2$ tvrdjenje je trivijalno tačno, pa pretpostavimo da je $n>2$. Pošto je $\sum_{i=1}^{n} d_i=2n-2<2n$, postoji i tako da je $d_i=1$. Bez gubitka opštosti, možemo da pretpostavimo da je $d_n=1$.

Neka je $\mathcal{T}$ skup svih stabala sa čvorovima $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ takvih da svaki čvor v_i ima stepen d_i, $i=1,2,\ldots,n$. Podelimo stabla iz $\mathcal{T}$ u $n-1$ grupa $\mathcal{T}_1,\ \mathcal{T}_2,\ \ldots,\ \mathcal{T}_{n-1}$: skup $\mathcal{T}_j$ sadrži stabla u kojima je čvor v_n susedan sa čvorom v_j. Ako uzmemo stablo iz $\mathcal{T}_j$ i obrišemo čvor v_n (zajedno sa njegovom jedinom granom), dobijamo stablo sa čvorovima $\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\}$ takvih da je stepen v_i jednak d_i za $i\neq j$, dok je stepen v_j jednak d_j-1.

Lako se vidi da na ovaj način dobijamo bijekciju izmedju skupa $\mathcal{T}_j$ i skupa $\mathcal{T}_j'$ svih stabala sa čvorovima $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ sa nizom stepena $d_1, d_2, \dots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \dots, d_{n-1}$, s obzirom da različita stabla iz $\mathcal{T}_j$ daju različita stabla iz $\mathcal{T}_j'$, a iz svakog stabla iz $\mathcal{T}_j'$ možemo da dobijemo stablo iz $\mathcal{T}_j$ dodavanjem čvora v_n i njegovim spajanjem sa čvorom v_j.

Po induktivnoj pretpostavci, imamo da je

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_j| &= |\mathcal{T}_j'| \\ &= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!\cdots(d_{j-1}-1)!(d_j-2)!(d_{j+1}-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!} \\ &= \frac{(n-3)!(d_j-1)}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!} \end{aligned}$$

Ova formula važi i kada je $d_j = 1$: ona tada daje 0, što se slaže sa činjenicom da ne postoji stablo sa stepenom $d_j - 1 = 0$ u čvoru v_j.

Sada je ukupan broj stabala u $\mathcal{T}$ jednak

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}| &= \sum_{j=1}^{n-1} |\mathcal{T}_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-3)!(d_j-1)}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1}(d_j-1)\right) \frac{(n-3)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!} \\ &= \frac{(n-2)(n-3)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!}. \end{aligned}$$

S obzirom da je $d_n = 1$, razlomak možemo slobodno da proširimo sa $(d_n - 1)! = 0! = 1$, kako bismo dobili izraz iz tvrdjenja.

Na kraju, ako sumiramo po svim mogućim nizovima stepena stabala sa čvorovima $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i primenimo multinomijalnu teoremu, dobijamo da je ukupan broj stabala sa čvorovima $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jednak

$$\sum_{\substack{d_1, d_2, \dots, d_n \geq 1 \\ d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_{n-1}-1)!}$$

$$= \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!} = (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ puta}})^{n-2} = n^{n-2}.$$

209. Neka je a broj čvorova stepena 1, a c broj čvorova stepena 3. Tada, na osnovu broja čvorova i broja grana, imamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} a + c &= n, \\ a + 3c &= 2(n-1), \end{aligned}$$

čije je rešenje $a = \frac{n}{2} + 1$, $c = \frac{n}{2} - 1$.

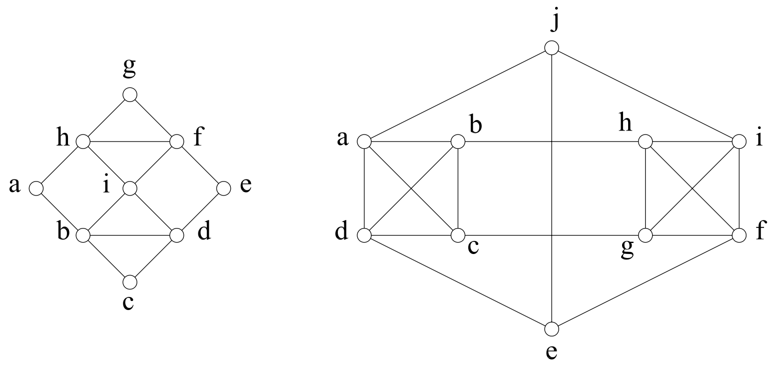
Kako a i c moraju da budu nenegativni celi brojevi, ako je n neparan broj, broj traženih stabala je 0.

Ako je n paran broj, tada postoji $\binom{n}{n/2+1}$ načina da se iz skupa $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ izabere podskup A čvorova koji treba da budu stepena 1— preostali čvorovi iz $V \setminus A$ tada treba da budu stepena 3. Prema zadatku 208, broj stabala u kojima čvorovi iz A imaju stepen 1, dok čvorovi iz $V \setminus A$ imaju stepen 3 jednak je

$$\frac{(n-2)!}{(1-1)!^{n/2+1} \cdot (3-1)!^{n/2-1}} = \frac{(n-2)!}{2^{n/2-1}}.$$

Stoga je, za parno n, ukupan broj stabala u kojima svaki čvor ima stepen 1 ili 3 jednak $\binom{n}{n/2+1}\frac{(n-2)!}{2^{n/2-1}}$.

210. Graf sa leve strane je Ojlerov, jer su stepeni svih čvorova parni. Jedna od njegovih Ojlerovih kontura je $abcdefghibdifha$.



Graf sa desne strane nije Ojlerov, jer čvorovi e i j imaju neparan stepen.

211. Ako je G Ojlerov graf, onda je svaki njegov čvor parnog stepena. Kako G ima paran broj čvorova, to je zbir stepena njegovih čvorova deljiv sa 4. Zbir stepena je jednak dvostrukom broju grana, pa je stoga broj grana deljiv sa 2, što znači da ne može da bude neparan.

212. Neka su $e = \{u, v\}$ i $f = \{v, w\}$ grane sa zajedničkim čvorom v. Neka je $G' = (G - e - f) + \{u, w\}$ pomoćni graf dobijen brisanjem grana e i f i

dodavanjem nove grane izmedju čvorova u i w. Svi čvorovi u G' imaju isti stepen kao u G, izuzev čvora v, čiji je stepen u G' manji tačno za 2. Kako su stepeni svih čvorova u G parni, to su stepeni svih čvorova u G' takodje parni, pa je i G' Ojlerov graf. Neka je C' Ojlerova kontura u G'. Kontura C' sadrži granu $\{u, w\}$, pa ukoliko granu $\{u, w\}$ zamenimo granama e i f, dobijamo Ojlerovu konturu u G koja sadrži grane e i f jednu za drugom.

213. Kako je G Ojlerov graf, stepeni njegovih čvorova su parni. Da bi $\overline{G}$ bio Ojlerov graf, on mora da bude povezan i stepeni njegovih čvorova takodje moraju da budu parni. Ako čvor v ima stepen d_v u grafu G, tada je njegov stepen u $\overline{G}$ jednak $n - 1 - d_v$, gde je n broj čvorova grafa G. Kako je d_v paran broj, izraz $n - 1 - d_v$ je paran ako i samo ako je n neparan broj. Prema tome, $\overline{G}$ je Ojlerov graf ako je povezan i ima neparan broj čvorova.

214. $\Leftarrow$: Neka se skup grana grafa G može razbiti na disjunktne konture $G = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$. Ako kroz neki čvor grafa v prolazi s od tih k kontura onda je stepen $d_G(v) = 2s$, jer svaka grana koja je incidentna sa v pripada nekoj od tih s kontura. Time smo pokazali da je stepen svakog čvora paran, pa je graf G Ojlerov.

   $\Rightarrow$: Neka je G Ojlerov graf sa n čvorova. Dokažimo matematičkom indukcijom po broju grana da se on može razbiti na disjunktne konture.

   Baza indukcije: Za $m < n$ graf G ili nije povezan ili je stablo—u svakom slučaju, ne može da bude Ojlerov graf. Stoga za bazu indukcije uzimamo $m = n$. Tada je G unicikličan graf, tj. sadrži tačno jednu konturu. Kako je G Ojlerov graf, stepen svakog čvora je paran, tj. veći ili jednak 2, pa iz $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2n$, dobijamo da stepen svakog čvora mora da bude jednak 2, odnosno da je graf G kontura C_1.

   Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da se skup grana svakog Ojlerovog grafa sa $m \leq k$ grana može razbiti na disjunktne konture.

   Indukcijski korak: Neka je G povezan Ojlerov graf sa $m = k + 1$ grana. Kako je $m > n - 1$ graf nije stablo, pa sadrži neku konturu. Ukoliko obrišemo proizvoljnu konturu C dobijamo graf $G - C$, koji može biti i nepovezan, ali koji ima sve čvorove parnog stepena. Stoga je svaka komponenta povezanosti grafa $G - C$ Ojlerov graf, pa se skup njenih grana po indukcijskoj pretpostavci može razbiti na disjunktne konture. Time dobijamo i da se skup grana grafa G može razbiti na disjunktne konture.

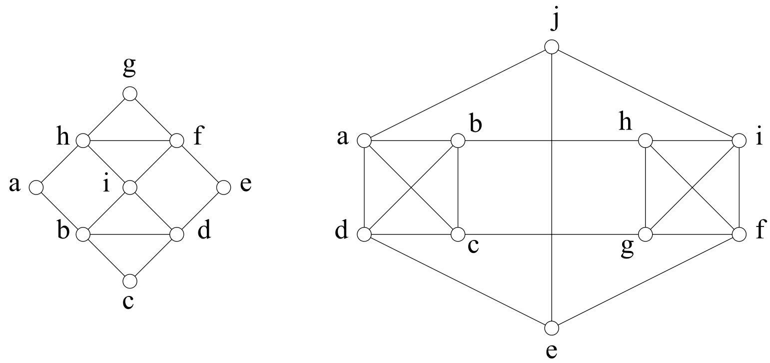
215. Neka G sadrži Ojlerov put P sa krajnjim čvorovima u i v. Ako su u i v susedni u G, tada je $P \cup \{\{u, v\}\}$ Ojlerova kontura u G, pa G nema čvorove neparnog stepena.

   Ako u i v nisu susedni u G, tada je $P \cup \{\{u, v\}\}$ Ojlerova kontura u $G + \{u, v\}$, pa $G + \{u, v\}$ nema čvorove neparnog stepena. Stepeni čvorova u $G + \{u, v\}$ su isti kao i u G, izuzev stepena čvorova u i v koji su veći za jedan u $G + \{u, v\}$ nego u G. Zbog toga su u G stepeni čvorova u i v neparni, dok su stepeni ostalih čvorova parni, pa G ima dva čvora neparnog stepena.

S druge strane, pretpostavimo da G ima nula ili dva čvora neparnog stepena. Ako G nema čvorove neparnog stepena, tada G sadrži Ojlerovu konturu C, a $C \setminus e$ predstavlja Ojlerov put, za svaku granu $e \in C$.

Ako G ima dva čvora u i v neparnog stepena, tada, na osnovu prethodnog, graf $G + \{u, v\}$ nema čvorove neparnog stepena, pa on sadrži Ojlerovu konturu C. Sada je $C \setminus \{\{u, v\}\}$ Ojlerov put u G.

216. Graf G sa leve strane nije Hamiltonov. Pretpostavimo suprotno, i neka je C njegova Hamiltonova kontura. Ako je v čvor stepena 2 sa susedima u i w, tada kontura C mora da prolazi redom kroz čvorove u, v i w. Čvorovi a, c, e i g imaju stepen 2 u G, tako da kontura C mora da se sastoji od delova hab, bcd, def i fgh. Kako C prolazi tačno jednom kroz svaki od čvorova, zaključujemo da svaki od ovih delova mora da se nastavlja na prethodni, tako da C mora da sadrži konturu $habcdefgh$. Medjutim, tada je C jednako $habcdefgh$ i ne prolazi kroz čvor i, što znači da C nije Hamiltonova kontura. Prema tome, G nije Hamiltonov graf.



Graf sa desne strane jeste Hamiltonov: jedna od njegovih Hamiltonovih kontura je $abcdefghija$.

217. Neka su $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ delovi kompletnog bipartitnog grafa $K_{n,n}$. Neka su p i q proizvoljne permutacije skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tada je $a_{p(1)}b_{q(1)}a_{p(2)}b_{q(2)} \ldots a_{p(n)}b_{q(n)}$ jedan Hamiltonov ciklus u $K_{n,n}$. Ovakvih ciklusa ima ukupno $n! \cdot n!$.

Medjutim, na ovaj način svaki Hamiltonov ciklus C u $K_{n,n}$ brojan je $2n$ puta: odgovarajuće permutacije p i q mogu se dobiti nakon što, na jedan od n načina, izaberemo početni čvor iz dela A na ciklusu C i, na jedan od dva načina, izaberemo njegovog suseda iz dela B na ciklusu C.

Prema tome, $K_{n,n}$ ima tačno $\frac{n! \cdot n!}{2n} = n! \cdot (n-1)/2$ Hamiltonovih ciklusa.

218. Neka su

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \\ B &= \{b_1, b_2, \ldots, b_{2n}\}, \\ C &= \{c_1, c_2, \ldots, c_{3n}\} \end{aligned}$$

delovi kompletnog tripartitnog grafa $K_{n,2n,3n}$. Tada je

$$c_1, a_1, c_2, a_2, \ldots, c_n, a_n,$$
$$c_{n+1}, b_1, c_{n+2}, b_2, \ldots, c_{3n}, b_{2n}$$

Hamiltonova kontura u $K_{n,2n,3n}$.

S druge strane, pretpostavimo da je $K_{n,2n,3n+1}$ Hamiltonov graf i neka je C njegova Hamiltonova kontura. Čvorovi dela sa $3n + 1$ čvorova nisu susedni u $K_{n,2n,3n+1}$, tako da oni ne mogu stajati jedan do drugog u konturi C. Ovo znači da kontura C mora da ima bar $2(3n + 1)$ čvorova, što je nemoguće, jer graf $K_{n,2n,3n+1}$ ima $6n + 1$ čvorova. Prema tome, $K_{n,2n,3n+1}$ nije Hamiltonov graf.

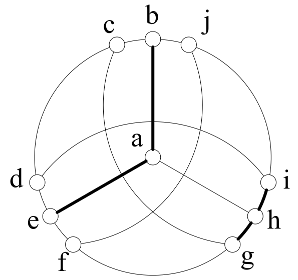
219. Tvrdjenje ćemo dokazati matematičkom indukcijom po n. Najpre, za $n = 2$, graf Q_n je kontura sa četiri čvora, pa je to ujedno i Hamiltonova kontura.

Dalje, pretpostavimo da je graf Q_n Hamiltonov za neko $n \geq 2$ i neka je c_1, c_2, …, c_{2^n} Hamiltonova kontura u Q_n. Čvorovi grafa Q_n su n-torke elemenata 0 i 1, dok su čvorovi grafa Q_{n+1} $(n + 1)$-torke elemenata 0 i 1. Zbog toga je

$$(c_1, 0), (c_2, 0), \ldots, (c_{2^n-1}, 0), (c_{2^n}, 0), (c_{2^n}, 1), (c_{2^n-1}, 1), \ldots, (c_2, 1), (c_1, 1)$$

Hamiltonova kontura u grafu Q_{n+1}, pa, po principu matematičke indukcije, zaključujemo da je Q_n Hamiltonov graf za svako $n \geq 2$.

220. Pretpostavimo da Petersenov graf sadrži Hamiltonovu konturu C. Bez gubitka opštosti, možemo da pretpostavimo da je u konturi C čvor a susedan sa čvorovima b i e. Odatle sledi da čvor h, treći sused čvora a, mora da bude susedan sa čvorovima g i i u C. Sada postoje tri slučaja, u zavisnosti od toga sa kojim čvorovima su u konturi C susedni čvorovi b i e.



i) Čvor b je susedan sa c, a čvor e je susedan sa d. Sada čvorovi c i d ne mogu da budu susedni u C, inače se obrazuje kontura $abcdea$, koja nije Hamiltonova. Prema tome, u C čvor c mora da bude susedan sa g, a čvor d sa i. Medjutim, tada se formira kontura $abcghidea$, koja takodje nije Hamiltonova, pa je ovaj slučaj nemoguć.

ii) Čvor b je susedan sa c, a čvor e je susedan sa f (ovaj slučaj je analogan slučaju kada je čvor b susedan sa j, a čvor e susedan sa d). Čvor j ne može da bude susedan sa b u C, pa stoga j mora da bude susedan sa f i i u C. Slično, čvor d ne može da bude susedan sa e u C, pa stoga d mora da bude susedan sa c i i u C. Medjutim, tada čvor i mora da bude susedan u C sa čvorovima d, h i j, što nije moguće.

iii) Čvor b je susedan sa j, a čvor e je susedan sa f. Čvorovi f i j ne mogu da budu susedni u C, inače se formira kontura $abjfea$, koja nije Hamiltonova. Prema tome, u C čvor j mora da bude susedan sa i, a čvor f sa g. Medjutim, tada se formira kontura $abjihgfea$, koja takodje nije Hamiltonova, pa ni ovaj slučaj nije moguć.

Kako smo u sva tri slučaja dobili kontradikciju, zaključujemo da Petersenov graf nije Hamiltonov.

221. Neka je P Hamiltonov put u grafu G sa krajnjim čvorovima u i v. Ako su čvorovi u i v susedni u G, tada je $P \cup \{\{u,v\}\}$ Hamiltonova kontura u G, pa za svaki podskup $S \subseteq V$ graf $G - S$ ima najviše $|S|$ komponenti.

    Ako čvorovi u i v nisu susedni u G, tada je $P \cup \{\{u,v\}\}$ Hamiltonova kontura u $G + \{u,v\}$, pa za svaki podskup $S \subseteq V$ graf $(G + \{u,v\}) - S$ ima najviše $|S|$ komponenti. Ako je C komponenta grafa $(G + \{u,v\}) - S$ koja sadrži granu $\{u,v\}$, tada brisanjem ove grane komponenta C ili ostaje povezana ili se raspada na najviše dve komponente. U svakom slučaju, broj komponenti se povećava za najviše 1, tako da važi da za svaki podskup $S \subseteq V$ graf $G - S$ ima najviše $|S| + 1$ komponenti.

222. Čvorovi y_1 i y_3 su susedni samo sa čvorom x_5, tako da sparivanje koje sparuje y_1 mora da sadrži granu $\{x_5, y_1\}$, dok sparivanje koje sparuje y_3 mora da sadrži granu $\{x_5, y_3\}$. S obzirom da ove dve grane nisu disjunktne, ne postoji sparivanje koje istovremeno sparuje čvorove y_1 i y_3, pa samim tim, ne postoji ni savršeno sparivanje ovog grafa.

223. a) Jedan od dva uvećavajuća puta za sparivanje M koji počinju u čvoru x_2 je x_2, y_5, x_5, y_1.

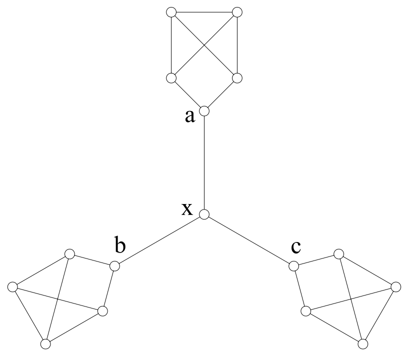
    b) Ako je P skup grana uvećavajućeg puta iz dela pod a), tada je sparivanje

    $$M' = M \Delta P = \{\{x_3, y_2\}, \{x_4, y_4\}, \{x_2, y_5\}, \{x_5, y_1\}\}.$$

    c,d) S obzirom da, prema zadatku 222, dati graf nema savršeno sparivanje, najveće sparivanje sadrži najviše 4 grane, pa je sparivanje M' zaista najveće sparivanje. Samim tim, nemoguće je da postoji uvećavajući put za M'.

224. Neka graf G ima savršeno sparivanje M i neka je $e = \{x, y\} \in M$. Ako su G_1, G_2, ..., G_k komponente grafa $G - x - y$, tada je $(M \setminus \{e\}) \cap E(G_i)$ savršeno sparivanje komponente G_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Pretpostavimo sada da graf G sa slike ima savršeno sparivanje. Čvor x je sparen sa nekim od čvorova a, b i c i, bez gubitka opštosti, možemo da pretpostavimo da je čvor x sparen sa čvorom a. Prema prethodnom, svaka komponenta grafa $G - x - a$ ima savršeno sparivanje. Medjutim, ovo je nemoguće, jer komponente grafa $G - x - a$ koje sadrže čvorove b i c imaju neparan broj čvorova, pa ne mogu da imaju savršeno sparivanje.



225. Pretpostavimo da postoji stablo T koje ima dva različita savršena sparivanja M_1 i M_2. Zbog $M_1 \neq M_2$, postoji grana $e = \{x, y\} \in M_1 \setminus M_2$. Neka je C komponenta grafa $T - e$ koja sadrži čvor x.

S obzirom da $e \in M_1$, komponenta C sadrži neparan broj čvorova: čvor x i po dva čvora za svaku granu iz $M_1 \setminus \{e\}$, čiji krajevi pripadaju C.

S druge strane, kako $e \notin M_2$, čvor x je sparen sa nekim čvorom iz komponente C, tako da komponenta C sadrži paran broj čvorova: po dva čvora za svaku granu iz M_2, čiji krajevi pripadaju C.

Medjutim, ovo je kontradikcija, jer broj čvorova u C ne može istovremeno biti i paran i neparan.

226. Tvrdjenje dokazujemo indukcijom po n. Najpre, proverom svih neizomorfnih grafova sa 4 čvora koji zadovoljavaju uslove tvrdjenja (ima ih ukupno šest), može se videti da tvrdjenje važi za $n = 2$.

Sada, pretpostavimo da tvrdjenje važi za svaki ovakav skup sa $2(n-1)$ osoba. Neka je X skup sa $2n$ osoba i neka su x, y, z tri proizvoljne osobe iz X. Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da se medju osobama x, y i z poznaju osobe x i y. Skup $X \setminus \{x, y\}$ zadovoljava induktivnu pretpostavku, pa se stoga može podeliti u $n - 1$ parova koji čine poznanici. Dodavanjem para $\{x, y\}$ dobijamo traženu podelu skupa X na parove poznanika.

227. a) Neka je G k-regularni bipartitan graf sa particijom čvorova $V(G) = X \cup Y$. Neka je E_A skup grana čiji je jedan kraj u proizvoljnom skupu $A \subseteq X$.

Pošto je stepen svakog čvora jednak k, imamo da je $|E_A| = k|A|$. Skup $N_G(A)$ predstavljaju oni krajevi grana iz E_A koji pripadaju skupu Y. S obzirom da više grana iz E_A može da ima zajednički kraj u skupu Y, broj elemenata u $N_G(A)$ će, u opštem slučaju, biti manji od $k|A|$, medjutim, kako svaki čvor iz $N_G(A)$ može da bude kraj najviše k grana iz E_A, imamo da je $|N_G(A)| \geq \frac{|E_A|}{k} = |A|$, pa je ispunjen Holov uslov. Samim tim, graf G ima savršeno sparivanje.

b) Ovaj deo je primena tvrdjenja pod a). Da bi primenili ovo tvrdjenje, najpre moramo da konstruišemo graf koji će odgovarati datom problemu. Zato, neka je G bipartitni graf čiji se skup čvorova sastoji od unije skupa studenata i skupa knjiga, pri čemu su student u i knjiga v spojeni granom ako se knjiga v nalazi na spisku knjiga koje student u želi da pozajmi. S obzirom da svaki student ima spisak od k knjiga, vidimo da je njegov stepen u grafu G jednak k. Dalje, svaka knjiga se nalazi na tačno k spiskova, tako da je njen stepen u grafu G takodje jednak k. Stoga je G k-regularni bipartitni graf i, prema delu a), sadrži savršeno sparivanje, koje pokazuje kako svi studenti mogu istovremeno da pozajme po jednu knjigu sa svojih spiskova.

228. Kako je G bipartitan Hamiltonov graf, on mora imati podjednak broj čvorova u obe klase, pa stoga možemo da pretpostavimo da je ukupan broj čvorova jednak $2n$. Neka je $C\colon\ u_0, u_1, \ldots, u_{2n-1}, u_{2n} = u_0$ Hamiltonova kontura grafa G. Zbog bipartitnosti, čvorovi $u_0, u_2, \ldots, u_{2n-2}$ čine jednu, a čvorovi $u_1, u_3, \ldots, u_{2n-1}$ čine drugu klasu.

Ako su čvorovi u i v u istoj klasi biparticije G, tada $G - u - v$ nema savršeno sparivanje, jer jedna od njegovih klasa sadrži $n-2$, a druga n čvorova.

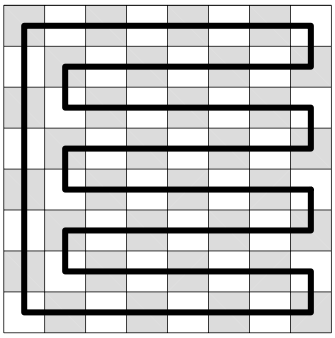
Ako su čvorovi u i v u različitim klasama biparticije G, tada postoje i i j tako da je $u = u_i$ i $v = u_j$. Bez gubitka opštosti, možemo da pretpostavimo da je $i = 2i'$ paran broj, a $j = 2j' + 1$ neparan broj. Tada, ako je $i < j$, graf $G - u - v$ ima savršeno sparivanje

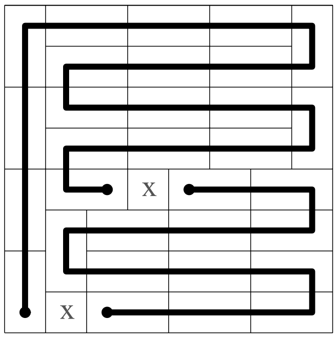
$$\begin{aligned} & \{\, \{u_{2k}, u_{2k+1}\} \,|\, k = 0, 1, \ldots, i' - 1 \,\} \\ \cup\ & \{\, \{u_{2k}, u_{2k-1}\} \,|\, k = i' + 1, j' + 2, \ldots, j' \,\} \\ \cup\ & \{\, \{u_{2k}, u_{2k+1}\} \,|\, k = j' + 1, 1, \ldots, n - 1 \,\}, \end{aligned}$$

a ako je $j < i$, graf $G - u - v$ ima savršeno sparivanje

$$\begin{aligned} & \{\, \{u_{2k-1}, u_{2k}\} \,|\, k = 1, 2, \ldots, j' \,\} \\ \cup\ & \{\, \{u_{2k+1}, u_{2k}\} \,|\, k = j' + 1, j' + 2, \ldots, i' - 1 \,\} \\ \cup\ & \{\, \{u_{2k-1}, u_{2k}\} \,|\, k = i' + 1, i' + 2, \ldots, n \,\}. \end{aligned}$$

Da bismo ovo tvrdjenje primenili na problem sa šahovskom tablom, najpre moramo da konstruišemo graf koji odgovara tom problemu. Stoga, neka je G graf sa skupom čvorova koji predstavljaju jedinična polja na šahovskoj tabli dimenzija 8×8, pri čemu su dva polja spojena granom u G ako imaju zajedničku stranicu na tabli. Dobijeni graf G je bipartitan—jednu klasu čine belo obojena, a drugu crno obojena polja. Zatim, G je i Hamiltonov—jedna od mnogih Hamiltonovih kontura je prikazana na slici.





Primetimo da domine 2×1 na šahovskoj tabli odgovaraju granama grafa G, a da pokrivanje ovakvim dominama odgovara sparivanju grafa G. Ako su uklonjena dva jedinična polja u i v sa table, tada se ostatak table može pokriti dominama ako i samo graf $G-u-v$ ima savršeno sparivanje. Prema prethodnom tvrdjenju, ovo je moguće ako i samo ako su u i v u suprotnim klasama biparticije G, odnosno, ako i samo ako su polja u i v obojena različitim bojama na tabli.

229. Jedna od transverzala ove familije je data pomoću preslikavanja

$$\begin{pmatrix} \{a,b,l,e\} & \{l,e,s,t\} & \{s,t,a,b\} & \{s,a,l,e\} & \{t,a,l,e\} & \{s,a,l,t\} \\ a & s & b & l & e & t \end{pmatrix}.$$

230. Ako ova familija skupova ima transverzalu, tada svaki element predstavlja različiti skup familije. Medjutim, to je nemoguće, jer elementi s i t mogu da predstavljaju samo skup $\{m,a,s,t,e,r\}$.

231. Da bi dokazali tvrdjenje, dovoljno je primetiti da bipartitni graf $G_{\mathcal{S}}$ pridružen familiji $\mathcal{S}$ sadrži Hamiltonov put:

$$a,\ \ \{r,o,a,d\},\ \ d,\ \ \{r,i,d,s\},\ \ i,\ \ \{r,i,o,t\},\ \ o,\ \ \{m,o,a,t\},$$

$$m,\ \ \{d,a,m,s\},\ \ s,\ \ \{m,i,s,t\},\ \ t,\ \ \{s,t,a,r\},\ \ r.$$

Sada, ako uklonimo proizvoljni element x skupa $S=\bigcup\mathcal{S}$, dati Hamiltonov put se raspada na jedan ili dva parna puta (jedan, ako $x=a$ ili $x=r$; dva, u ostalim slučajevima), na osnovu kojih se lako konstruiše savršeno sparivanje grafa $G_{\mathcal{S}}-x$. Ovo ujedno znači i da skup $S\setminus\{x\}$ predstavlja transverzalu familije $\mathcal{S}$ za svako $x\in S$.

232. Bipartitni graf G pridružen ovoj familiji ima particiju čvorova $X = \{X_0, X_1, X_2, X_3, \dots\}$ i $Y = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Neka je $S = \{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}\}$, gde je $0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

Ako je $i_1 = 0$, tada je $N_G(S) = Y$, pa je $\infty = |N_G(S)| > |S|$.

Ako je $i_1 \ge 1$, tada je $i_2 \ge 2$, ..., $i_k \ge k$ i $N_G(S) = \{1, 2, \dots, i_k\}$, pa je $i_k = |N_G(S)| \ge |S|$.

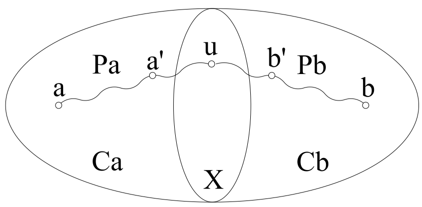
U svakom slučaju, vidimo da je Holov uslov zadovoljen.

Pretpostavimo sada da ova familija ima transverzalu i neka je t element koji predstavlja skup X_0. U tom slučaju, skupove X_1, X_2, ..., X_t predstavlja t različitih elemenata iz skupa

$$(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_t) \setminus \{t\} = \{1, 2, \dots, t-1\},$$

što je kontradikcija. Ovim vidimo da iz Holovog uslova ne mora da sledi postojanje savršenog sparivanja kada je u pitanju graf sa beskonačnim skupom čvorova.

233. a) Pretpostavimo da X minimalno rastavlja čvorove a i b i neka je u proizvoljan čvor iz X. Kako $X \setminus \{u\}$ ne rastavlja a i b, pa postoji put P izmedju a i b koji ne sadrži nijedan čvor iz $X \setminus \{u\}$. Medjutim, skup X rastavlja a i b, tako da put P sadrži čvor iz X, pa zaključujemo da mora da bude $P \cap X = \{u\}$. Neka je P_a deo puta P od čvora a do u i neka je a' sused čvora u na putu P_a. Slično, neka je P_b deo puta P od čvora b do u i neka je b' sused čvora u na putu P_b. U grafu $G - X$ čvor a' se nalazi u istoj komponenti kao čvor a, jer ih povezuje put $P_a - u$, koji je disjunktan sa skupom X zbog $P \cap X = \{u\}$. Slično, čvor b' se nalazi u istoj komponenti kao čvor b.



S druge strane, pretpostavimo da svaki čvor iz X ima suseda u komponenti C_a grafa $G - X$ koja sadrži a i suseda u komponenti C_b grafa $G - X$ koja sadrži b. Neka je u proizvoljan čvor iz X i neka je a' sused čvora u u komponenti C_a, a neka je b' sused čvora u u komponenti C_b. Dalje, neka je P_a put koji povezuje a i a' u C_a, a neka je P_b put koji povezuje b i b' u C_b. S obzirom da su C_a i C_b komponente grafa $G - X$, imamo da je $P_a \cap X = P_b \cap X = \emptyset$. Sada, skup $X \setminus \{u\}$ ne rastavlja čvorove a i b, jer su čvorovi a i b povezani u $G - (X \setminus \{u\})$ putem koji se sastoji od puta P_a, čvora u i puta P_b.

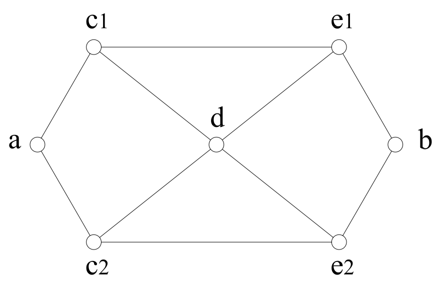
b) Dokažimo da Y_a rastavlja čvorove a i b. Posmatrajmo proizvoljan put P izmedju a i b. Kako X rastavlja a i b, to je $P \cap X \neq \emptyset$. Ako postoji čvor iz $P \cap X$ koji pripada $(X \cap C'_a) \cup (X \cap X')$, tada taj čvor pripada i Y_a, pa je $P \cap Y_a \neq \emptyset$. Pretpostavimo zato da je

$$P \cap (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') = \emptyset.$$

Tada zbog $X = (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') \cup (X \cap C'_b)$ važi da je $P \cap X = P \cap (X \cap C'_b)$. Neka je u prvi čvor na putu P, idući od a ka b, koji pripada skupu $X \cap C'_b$ i neka je P_a deo puta P od a do u. Put $P_a - u$ nema zajedničkih čvorova sa X, tako da se on ceo nalazi u C_a. Kako skup X' takodje rastavlja čvorove a i b i kako se čvor u nalazi u skupu C'_b, to na putu P_a (koji može da se nastavi do b ne izlazeći više iz C'_b) postoji čvor v koji pripada X'. Čvor v takodje pripada i C_a, jer pripada putu $P_a - u$, pa zaključujemo da $v \in Y_a$.

Sada vidimo da svaki put izmedju čvorova a i b sadrži čvor iz Y_a, pa zaključujemo da Y_a rastavlja a i b. Na sličan način se dokazuje i da Y_b rastavlja a i b.

c) Ne. Kontraprimer je dat na slici:



Lako je proveriti da skupovi $X = \{c_2, d, e_1\}$ i $X' = \{c_1, d, e_2\}$ minimalno rastavljaju čvorove a i b. Medjutim, skup $Y_a = \{c_1, c_2, d\}$ ne rastavlja minimalno a i b, s obzirom da njegov pravi podskup $\{c_1, c_2\}$ rastavlja a i b. Skup $Y_b = \{d, e_1, e_2\}$ takodje ne rastavlja minimalno a i b, s obzirom da njegov pravi podskup $\{e_1, e_2\}$ rastavlja a i b.

234. Neka je G povezan graf sa skupom presecajućih čvorova A i skupom blokova $\mathcal{B}$. Najpre ćemo dokazati da je blok graf grafa G povezan. Za svaki čvor X u blok grafu izaberimo čvor x koji će predstavljati X u G: ako je X presecajući čvor, onda je $x = X$, a ako je X blok, onda je x proizvoljni čvor iz X. Neka su sada X i Y proizvoljni čvorovi blok grafa, a x i y njihovi predstavnici. Kako je G povezan graf, to u G postoji put P: $x = u_0, u_1, \ldots, u_k = y$. Neka su $u_{a_1}, u_{a_2}, \ldots, u_{a_l}, a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_l$, svi presecajući čvorovi na putu P. Tada, za svako $i = 1, 2, \ldots, l-1$, čvorovi $u_{a_i}, u_{a_i+1}, \ldots, u_{a_{i+1}}$ pripadaju istom bloku grafa G; neka je to blok B_i. Dalje, ako je $x \neq u_{a_1}$, neka je B_0 blok koji sadrži čvorove $u_0, u_1, \ldots, u_{a_1}$

i ako je $y \neq u_{a_l}$, neka je B_l blok koji sadrži čvorove u_{a_l}, u_{a_l+1}, $\dots$, u_k. Tada put

$$(B_0,) \quad u_{a_1}, B_1, u_{a_2}, \dots, B_{l-1}, u_{a_l} \quad (, B_l),$$

gde se B_0 i B_l pojavljuju ako x i y nisu presecajući čvorovi, povezuje čvorove X i Y u blok grafu.

Dalje dokazujemo da blok graf ne sadrži cikluse. Pretpostavimo suprotno i neka je

$$a_1, B_1, a_2, B_2, \dots, a_k, B_k,$$

ciklus u blok grafu, gde je $a_i \in A$, $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Kako za svako $i = 1, 2, \dots, k$ važi da je a_i, $a_{i+1} \in B_i$ (gde uzimamo $a_{k+1} = a_1$), to u grafu G postoji put P_i izmedju a_i i a_{i+1} koji u potpunosti pripada B_i i ne sadrži druge presecajuće čvorove. Putevi P_1, P_2, $\dots$, P_k tada formiraju ciklus C koji sadrži čvorove a_1, a_2, $\dots$, a_k. Odavde sledi da unija $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ pripada jednom bloku, što je nemoguće, jer iz definicije sledi da blok ne može da sadrži drugi blok.

Sada vidimo da je blok graf povezanog grafa povezan i da ne sadrži cikluse, pa zaključujemo da je blok graf stablo.

235. Data relacija je očigledno refleksivna i simetrična. Treba još dokazati da, ako e_1 i e_2 leže na ciklusu C_1 i ako e_2 i e_3 leže na ciklusu C_2, tada i e_1 i e_3 leže na istom ciklusu. Krenimo od grane e_3 niz ciklus C_2 u oba smera dok ne naidjemo na prvi zajednički čvor sa ciklusom C_1; neka su x i y dva čvora do kojih smo došli (moguće je da su x i/ili y krajevi grane e_2). Čvorovi x i y su različiti, tako da oni dele C_1 na dva puta, od kojih jedan sadrži e_1; ovaj put i put u C_2 čiji su krajevi x i y i koji sadrži e_3 daju ciklus koji sadrži e_1 i e_3.

236. a) $\Rightarrow$ c): Najpre, neka su e i f dve grane sa zajedničkim krajem x i neka su y i z drugi krajevi tih grana. Pošto je $G - x$ povezan graf, on sadrži put koji povezuje y i z; taj put zajedno sa e i f daje ciklus.

Pretpostavimo sada da e i f nemaju zajedničkih čvorova. Pošto je G povezan graf, neka je $e = l_0$, l_1, $\dots$, $l_k = f$ niz grana, tako da grane e_i i e_{i+1} imaju zajednički čvor, $i = 0, 1, \dots, k-1$. Prema prethodnom, grane e_i i e_{i+1} leže na istom ciklusu za $i = 0, 1, \dots, k-1$, a kako je, prema zadatku 235, "biti na istom ciklusu" relacije ekvivalencije, zaključujemo da i grane e i f leže na istom ciklusu.

c) $\Rightarrow$ b): Za svaka dva čvora u i v, neka je e grana tako da je $u \in e$ i f grana tako da je $v \in f$. Grane e i f leže na istom ciklusu, a taj ciklus sadrži i čvorove u i v.

b) $\Rightarrow$ a): Pretpostavimo da graf $G - x$ nije povezan za neki čvor x. Ako čvorovi a i b pripadaju različitim komponentama $G - x$, tada a i b ne mogu da leže na istom ciklusu u G.

237. Neka je $Y \subseteq E(G)$ skup sa $\lambda(G)$ grana tako da graf $G-Y$ nije povezan. Izaberimo po jedan čvor sa svake grane iz Y, tako da nisu svi izabrani čvorovi u istoj komponenti $G-Y$, i označimo taj skup čvorova sa X. Važi da je $|X| \leq |Y|$, s obzirom da je moguće da je isti čvor izabran sa više grana iz Y. Graf $G-X$ ne sadrži nijednu granu iz Y, pa je $G-X$ podgraf grafa $G-Y$ i, s obzirom da $G-X$ sadrži čvor iz svake komponente $G-Y$, vidimo da je $G-X$ takodje nepovezan graf. Zbog toga je $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

     Dalje, neka je u čvor stepena $\delta(G)$ u grafu G. Ako obrišemo sve grane koje polaze iz čvora u, tada je dobijeni graf nepovezan, jer je čvor u jedna komponenta povezanosti. Zbog toga je $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

238. a) Ako se stablo sastoji samo od jednog čvora, tada je njegova čvorna povezanost 0 (zbog $\kappa(G) < |V(G)|$), dok granska povezanost nije definisana, jer ne sadrži nijednu granu.

     Ako stablo ima bar dva čvora, tada ono sadrži bar dva lista. Neka je D dijametar stabla i neka su u i v listovi na medjusobnom rastojanju D.

     Ako je $D = 1$, tada je stablo izomorfno sa K_2 i važi $\kappa(K_2) = 1$, zbog $\kappa(G) < |V(G)|$, i $\lambda(K_2) = 0$, zbog $\lambda(G) < |E(G)|$.

     Ako je $D \geq 2$, tada brisanjem proizvoljnog čvora, različitog od u i v, sa jedinstvenog puta koji povezuje u i v, stablo se raspada na bar dve komponente povezanosti, tako da je njegova čvorna povezanost jednaka 1. Slično, brisanjem proizvoljne grane sa istog puta stablo se takodje raspada na dve komponente povezanosti, pa je njegova granska povezanost jednaka 1.

     b) Ako je $n = 1$, tada je, kao i delu pod a), $\kappa(K_1) = 0$, dok granska povezanost nije definisana.

     Ako je $n = 2$, tada je, ponovo kao u delu pod a), $\kappa(K_2) = 1$ i $\lambda(K_2) = 0$.

     Ako je $n \geq 3$, tada je $\kappa(K_n) = n-1$: naime, brisanjem proizvoljnih k, $k < n-1$, čvorova, ostaje $n-k$ čvorova koji formiraju kompletan podgraf i koji je povezan. Kako je $\delta(K_n) = n-1$, iz Vitnijevih nejednakosti sada dobijamo da je $\lambda(K_n) = n-1$, jer je $n-1 = \kappa(K_n) \leq \lambda(K_n) \leq \delta(K_n) = n-1$.

     c) Ako je $m = n = 1$, tada je $K_{1,1} \cong K_2$, pa je $\kappa(K_{1,1}) = 1$ i $\lambda(K_{1,1}) = 0$.

     Neka je dalje $\max(m,n) \geq 2$ i pretpostavimo, bez gubitka opštosti, da je $n \geq m$. S obzirom da je $\delta(K_{m,n}) = \min(m,n)$, iz Vitnijevih nejednakosti imamo da je $\kappa(K_{m,n}) \leq \lambda(K_{m,n}) \leq \min(m,n)$.

     Dokazaćemo da je $\kappa(K_{m,n}) = \min(m,n)$, iz čega direktno sledi i da je $\lambda(K_{m,n}) = \min(m,n)$. Naime, ako obrišemo manje od m čvorova iz $K_{m,n}$, recimo s čvorova iz klase sa m čvorova i t čvorova iz klase sa n čvorova, tada je $s < m$ i $t < n$, pa se posle brisanja tih čvorova dobija graf izomorfan sa $K_{m-s,n-t}$, koji je i dalje povezan. Zato je $\kappa(K_{m,n}) > m-1$, iz čega sledi da je $\kappa(K_{m,n}) = m$.

     d) Pretpostavimo da je $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ i neka je $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. U grafu $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ važi da je $\delta(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = n - n_k$, pa je i $\kappa(K_{n_1,\ldots,n_k}) \leq \lambda(K_{n_1,\ldots,n_k}) \leq n - n_k$. S druge strane, ako se obriše nekoliko čvorova iz $K_{n_1,\ldots,n_k}$ tako da u bar dve klase ostane bar po jedan čvor, tada je rezultujući graf povezan. Zbog toga je $\kappa(K_{n_1,\ldots,n_k}) > n - n_k - 1$, iz čega sledi da je $\kappa(K_{n_1,\ldots,n_k}) = n - n_k$, a iz Vitnijeve nejednakosti tada sledi i da je $\lambda(K_{n_1,\ldots,n_k}) = n - n_k$.

239. Dokazaćemo indukcijom po n da je $\kappa(Q_n) = n$. Za $n = 1$ važi da je $Q_1 \cong K_2$, pa je $\kappa(Q_1) = 1$.

Pretpostavimo sada da za neko $n \geq 2$ važi da je $\kappa(Q_{n-1}) = n - 1$. Za $i = 0, 1$, neka je Q^i podgraf Q_n indukovan čvorovima $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kod kojih je $a_1 = i$. Primetimo da je svaki od grafova Q^0 i Q^1 izomorfan sa $(n-1)$-dimenzionalnom kockom Q_{n-1}. Neka je iz Q_n obrisan skup X sa $|X| < n$ čvorova.

Ako je $X \cap Q^0 \neq \emptyset$ i $X \cap Q^1 \neq \emptyset$, tada je $|X \cap Q^0| < n - 1$ i $|X \cap Q^1| < n - 1$, pa su, po induktivnoj pretpostavci, podgrafovi $Q^0 - (X \cap Q^0)$ i $Q^1 - (X \cap Q^1)$ povezani. Dalje, svaki čvor $(0, a_2, \ldots, a_n)$ iz Q^0 je susedan sa čvorom $(1, a_2, \ldots, a_n)$ iz Q^1, tako da je ukupan broj grana izmedju Q^0 i Q^1 jednak 2^{n-1}. Kako je $2^{n-1} > |X|$, to u $Q_n - X$ postoji neka grana koja spaja čvor iz $Q^0 - (X \cap Q^0)$ sa čvorom iz $Q^1 - (X \cap Q^1)$, pa zaključujemo da je u ovom slučaju graf $Q_n - X$ povezan.

Pretpostavimo sada da je, na primer, $X \subseteq Q^0$, tada je $X \cap Q^1 = \emptyset$. Neka su $u = (0, u_2, \ldots, u_n)$ i $v = (0, v_2, \ldots, v_n)$ dva proizvoljna čvora iz $Q^0 - X$. U grafu $Q_n - X$ ova dva čvora su povezana putem koji od čvora u vodi granom do čvora $(1, u_2, \ldots, u_n)$ u Q^1, zatim kroz povezani graf Q^1 do čvora $(1, v_2, \ldots, v_n)$ i, na kraju, granom do čvora v. Na sličan način se dokazuje da su svaka dva čvora iz $Q_n - X$ povezana putem, tako da je i u ovom slučaju graf $Q_n - X$ povezan.

Iz prethodnog sledi da je $\kappa(Q_n) \geq n$. Medjutim, kako je $\delta(Q_n) = n$, to iz Vitnijevih nejednakosti zaključujemo da je $\kappa(Q_n) = n$, pa po principu matematičke indukcije, zaključujemo da ovo tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n. Kao posledicu Vitnijevih nejednakosti, takodje dobijamo i da je $\lambda(Q_n) = n$.

240. Iz Vitnijeve nejednakosti $\delta(G) \geq \lambda(G) = l$ sledi da je

$$|E(G)| = \frac{\sum_{u \in V(G)} d_u}{2} \geq \frac{n\delta(G)}{2} \geq \frac{nl}{2}.$$

241. U slučaju da je $k \geq n - 1$ imamo da je $\delta(G) \geq \frac{2n-3}{2} = n - \frac{3}{2}$, odnosno, pošto je $\delta(G)$ ceo broj, $\delta(G) \geq n - 1$. No, tada je G kompletan graf, pa je on n-povezan za $n \geq 2$.

Neka je dalje $k \leq n - 2$. Pretpostavimo da je iz grafa G obrisan skup X sa $|X| < k$ čvorova. Neka je u čvor najmanjeg stepena u $G - X$. Stepen čvora u u G je bar $\delta(G)$, pa stoga važi da je

$$\delta(G - X) \geq \delta(G) - |X| \geq \frac{n + k - 2}{2} - |X| \geq \frac{n - |X| - 1}{2}.$$

Kako $G - X$ ima $n - |X| \geq 3$ čvorova, to prema zadatku 159.a) zaključujemo da je $G - X$ povezan graf, pa je stoga G k-povezan graf.

242. Dokazaćemo da je jedina takva funkcija data sa $f(k) = 1$ za svako $k \in \mathbf{N}$. Uzmimo primer povezanog grafa koji se dobija od dva disjunktna kompletna grafa K_k dodavanjem novog čvora u susednog sa svim čvorovima u oba kompletna podgrafa. Tada čvor u ima stepen $2k$, a svi ostali čvorovi imaju stepen k. Kako se brisanjem čvora u dobija nepovezan graf, to je povezanost ovog grafa jednaka 1, pa zato mora da važi i $f(k) = 1$.

243. Koristićemo indukciju po k. Neka je C ciklus koji prolazi kroz čvorove x_1, $x_2, \ldots, x_k$. Ako je $x_k \in V(C)$, dokaz je završen; pretpostavimo zato da je $x_k \notin V(C)$. Razlikujemo dva slučaja:

a) Pretpostavimo da postoji k x_k-C puteva $P_1, P_2, \ldots, P_k$ kojima je x_k jedini zajednički čvor. Čvorovi $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ dele C u $k-1$ lukova, pa jedan od ovih lukova (zajedno sa svojim krajevima) sadrži krajeve bar dva puta P_i i P_j. Dodavanjem puteva P_i i P_j u C, i brisanjem luka u C izmedju krajeva P_i i P_j (koji ne sadrži nijedan čvor x_p, $1 \leq p \leq k-1$), dobijamo ciklus koji sadrži čvorove $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

b) Ako ne postoji k x_k-C puteva čiji je jedini zajednički čvor x_k, tada, po Mengerovoj teoremi, postoji skup X, $|X| \leq k-1$, $x_k \notin X$, koji sadrži čvor iz svakog x_k-C puta. Pošto je $G - X$ povezan graf, svaki čvor iz $C \setminus X$ može da bude povezan sa x_k pomoću puta. Ovo je kontradikcija, osim kada je $X = V(C) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$. U ovom slučaju, na sličan način se može dokazati da postoji $k-1$ x_k-C puteva kojima je x_k jedini zajednički čvor. Ovi putevi povezuju x_k sa čvorovima $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$. Dodavanjem dva proizvoljna puta od njih, koji povezuju x_k sa susednim čvorovima u C, i brisanjem grane izmedju ta dva čvora u C, dobijamo ciklus koji sadrži čvorove $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

244. Neka je G k-povezani graf sa bar $2k$ čvorova i neka je C ciklus najveće dužine u G. Ako je $|C| \leq 2k-1$, neka je $u \in V(G) \setminus C$ i $N(u)$ skup suseda čvora u. Po Mengerovoj teoremi, postoji k disjunktnih $N(u)$-C puteva $P_1, P_2, \ldots, P_k$. S obzirom da je $|C| \leq 2k-1$, to postoje dva puta P_i i P_j čiji su C-krajevi susedni. Dodavanjem puteva P_i i P_j u C, zajedno sa granama koje spajaju njihove $N(u)$-krajeve sa u, i brisanjem grane koja spaja njihove C-krajeve, dobijamo ciklus čija je dužina bar $|C|+1$, što je kontradikcija.

245. a) Neka je m broj grana, a t broj trouglova grafa G. Svakoj grani $e = \{u, v\}$ odgovaraju dve zatvorene šetnje dužine 2: u, v, u i v, u, v. Zato je $2m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

Dalje, svakom trouglu odgovara ukupno šest zatvorenih šetnji dužine 3 po njegovim granama koje se razlikuju po početnom čvoru i smeru obilaska trougla. Zato je $6t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3$.

b) Postoje tri tipa zatvorenih šetnji dužine 4 koje polaze iz proizvoljnog čvora u:

- Šetnja opisuje ciklus dužine 4. Svaki ciklus daje ukupno osam ovakvih šetnji, jer postoje četiri moguća početna čvora i dva smera obilaska ciklusa, tako da je ukupan broj ovakvih šetnji jednak $8\sigma_4$.
- Šetnja tipa u, s, u, t, u, gde su s i t susedi čvora u, koji mogu da budu i jednaki. Broj ovakvih šetnji koje polaze iz čvora u je d_u^2, a ukupan broj ovakvih šetnji jednak je $D_2 = \sum_{u \in V(G)} d_u^2$.
- Šetnja tipa u, v, w, v, u, gde su čvorovi u i w na rastojanju 2. S obzirom da ne znamo broj čvorova na udaljenosti 2 od čvora u, ovaj tip šetnji prebrojavamo po čvoru v. Za svako $v \in V(G)$, postoji d_v mogućnosti za čvor u i d_v mogućnosti za čvor w, pa je ukupan broj ovakvih puteva takodje $D_2 = \sum_{u \in V(G)} d_u^2$.

Kako je ukupan broj zatvorenih šetnji dužine 4 jednak $L_4 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^4$, imamo da je $L_4 = 8\sigma_4 + 2D_2$, odnosno $\sigma_4 = \frac{1}{8}L_4 - \frac{1}{4}D_2$.

246. a) Bilo koji povezani bipartitni graf G zadovoljava ovaj uslov.

Neka su u i v čvorovi iz suprotnih klasa grafa G. Tada, zbog bipartitnosti, bilo koja šetnja izmedju u i v u G ima neparnu dužinu, tako da je $(A^{2k})_{u,v} = 0$ za svako $k \geq 0$. Takodje, svaka zatvorena šetnja u G ima parnu dužinu, tako da je $(A^{2k+1})_{u,u} = (A^{2k+1})_{v,v} = 0$ za svako $k \geq 0$.

b) Matrica A je nenegativna ako su svi njeni elementi nenegativni. Takodje, ako je A nenegativna matrica, tada su svi njeni stepeni A^k, $k \geq 0$, takodje nenegativni. Naime, iz $(A^{k+1})_{u,v} = \sum_{w=1}^n A^k_{u,w} A_{w,v}$ zaključujemo da iz nenegativnosti matrica A i A^k sledi nenegativnost matrice A^{k+1}, a odavde po principu matematičke indukcije sledi da su svi stepeni A^k, $k \geq 0$, nenegativni.

Sada, po binomnoj teoremi važi

$$(I + A)^{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} A^s,$$

a kako je matrica susedstva A po definiciji nenegativna, zaključujemo da nijedan element u matrici $(I+A)^{n-1}$ nije jednak 0 ako i samo ako za svako $u, v \in V(G)$ postoji k, $0 \leq k \leq n-1$, tako da je $(A^k)_{u,v}$ veće od 0. No, ovo važi ako i samo ako izmedju u i v postoji bar jedna šetnja dužine k, tj. ako i samo ako se u i v nalaze u istoj komponenti povezanosti. Kako ovo važi za svako $u, v \in V(G)$, zaključujemo da je G povezan graf.

247. Neka $N(i)$ označava skup suseda čvora i u grafu G. Svaka šetnja dužine $k+1$ izmedju i i j sastoji se od grane koja vodi od čvora i do nekog njegovog suseda $l \in N(i)$ i šetnje dužine k od l do j. Zato je

$$N_{k+1}(i, j) = \sum_{l \in N(i)} N_k(l, j),$$

a s obzirom da je $A_{i,l} = 1$ za $l \in N(i)$ i $A_{i,l} = 0$ za $l \notin N(i)$, to važi i

$$N_{k+1}(i,j) = \sum_{l=1}^{n} A_{i,l} N_k(l,j),$$

pa množenjem obe strane sa t^{k+1} i sabiranjem po k od 0 do ∞ dobijamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_{k+1}(i,j) t^{k+1} = t \sum_{l=1}^{n} A_{i,l} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} N_k(l,j),$$

odakle je

$$w_{i,j} - N_0(i,j) = t \sum_{l=1}^{n} A_{i,l} w_{l,j}.$$

Izraz $\sum_{l=1}^{n} A_{i,l} w_{l,j}$ predstavlja (i,j)-element u proizvodu matrica A i W, pa iz prethodne jednakosti dobijamo da važi

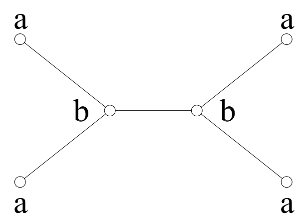
$$W - I = tAW,$$

odakle je

$$W = (I - tA)^{-1},$$

što je i trebalo dokazati.

248. Neka su u svakom od podgrafova čvorovi označeni kao na slici.



Pošto je graf 3-regularan, čvorovi označeni sa b imaju jednog suseda označenog sa b i dva suseda označena sa a i nemaju drugih suseda van njihovog podgrafa. S druge strane, čvorovi označeni sa a imaju jednog suseda označenog sa b i još dva suseda van njihovog podgrafa: iz prethodne rečenice sledi da to mogu da budu jedino čvorovi označeni takodje sa a.

Ako je sada x n-dimenzionalni vektor tako da je svakom čvoru označenom sa a pridružena vrednost x_a, a čvoru označenom sa b vrednost x_b, tada je x sopstveni vektor za vrednost 0 ako je

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_b &= 2x_a + x_b, \\ 0 \cdot x_a &= 2x_a + x_b, \end{aligned}$$

tj. ako je $x_b = -2x_a$. Ako stavimo $x_a = 1$ i $x_b = -2$, tada je x nenula sopstveni vektor za vrednost 0, što pokazuje da je 0 sopstvena vrednost grafa G.

249. a) Neka je G r-regularan graf sa skupom čvorova $\{1, 2, \dots, n\}$ i matricom susedstva A. Ako je j vektor čiji su svi elementi jednaki 1, tada važi

$$(A \cdot j)_{a,1} = \sum_{b=1}^{n} A_{a,b} j_{b,1} = \sum_{b=1}^{n} A_{a,b} = |N(a)| = r,$$

odakle zaključujemo da je $A \cdot j = r \cdot j$ i da je r sopstvena vrednost grafa G sa sopstvenim vektorom j.

Neka su $\lambda_1 = r$, λ_2, $\dots$, λ_n sopstvene vrednosti grafa G i neka je x_a sopstveni vektor koji odgovara λ_a, $a = 1, 2, \dots, n$, tako da vektori $x_1 = j$, x_2, $\dots$, x_n čine ortogonalnu bazu vektorskog prostora $\mathbf{R}^n$ (tj. tako da je $x_a^{\mathtt{T}} \cdot x_b = 0$ za $a \neq b$).

Komplement $\overline{G}$ ima matricu susedstva $\overline{A} = J - I - A$, gde je J kvadratna matrica čiji su svi elementi jednaki 1. Tada iz $A \cdot j = r \cdot j$ dobijamo

$$\overline{A} \cdot j = (J - I - A) \cdot j = n \cdot j - j - r \cdot j = (n - 1 - r) \cdot j,$$

a iz $x_a^{\mathtt{T}} \cdot j = 0$ za $a = 2, 3, \dots, n$ imamo

$$\overline{A} \cdot x_a = (J - I - A) \cdot x_a = 0 - x_a - \lambda_a x_a = -(\lambda_a + 1) x_a.$$

Odavde zaključujemo da $\overline{G}$ ima iste sopstvene vektore kao i G, a da su sopstvene vrednosti $\overline{G}$ brojevi $n - 1 - r$ i $-\lambda_a - 1$ za $a = 2, 3, \dots, n$.

b) Komplement $\overline{K_{m,m,\dots,m}}$ p-partitnog grafa sa m čvorova u svakom delu se sastoji od p komponenti povezanosti, od kojih svaki predstavlja kompletni graf K_m sa m čvorova. Spektar grafa K_m sastoji se od proste sopstvene vrednosti $m - 1$ i sopstvene vrednosti -1 sa višestrukošću $m - 1$. Pošto je $\overline{K_{m,m,\dots,m}}$ $(m - 1)$-regularan graf, iz dela pod a) sledi da $K_{m,m,\dots,m}$ ima prostu sopstvenu vrednost $pm - 1 - (m - 1) = pm - m$ i sopstvenu vrednost $-(m - 1) - 1 = -m$ sa višestrukošću $p - 1$ i sopstvenu vrednost $-(-1) - 1 = 0$ sa višestrukošću $pm - p$.

250. a) Pretpostavimo da postoji graf G, sa sopstvenim vrednostima $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, za koji važi $\alpha(G) > p_0 + \min\{p_-, p_+\}$. Tada postoji indukovani podgraf H grafa G sa $\alpha(G)$ čvorova koji ne sadrži grane. Kako je matrica susedstva grafa H jednaka nuli, spektar grafa H se sastoji od vrednosti 0 sa višestrukošću $\alpha(G)$ i prema teoremi o preplitanju sledi da je

$$\lambda_{\alpha(G)} \geq 0 \quad \text{i} \quad 0 \geq \lambda_{n-\alpha(G)+1}.$$

Iz nejednakosti $\lambda_{\alpha(G)} \geq 0$ sledi da je $\alpha(G) \leq p_+ + p_0$, a iz nejednakosti $\lambda_{n-\alpha(G)+1} \geq 0$ sledi da je $\alpha(G) \leq p_- + p_0$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $\alpha(G) > p_0 + \min\{p_-, p_+\}$.

b) Neka je H kompletan podgraf sa $\omega(G)$ čvorova grafa G. Sopstvene vrednosti grafa H su $\omega(G) - 1$ višestrukosti 1 i -1 višestrukosti $\omega(G) - 1$. Iz teoreme o preplitanju sledi

$$\lambda_1 \geq \omega(G) - 1, \quad \lambda_{\omega(G)} \geq -1, \quad -1 \geq \lambda_{n-\omega(G)+2},$$

odakle je, redom,

$$\omega(G) \leq \lambda_1 + 1, \quad \omega(G) \leq p_{-1} + p_{-1}^{+}, \quad \omega(G) - 1 \leq p_{-1} + p_{-1}^{-}$$

i odakle sledi tvrdjenje zadatka.

251. Da bi dokazali ovu nejednakost, primetimo da je najveća sopstvena vrednost Λ' grafa $K_{1,\Delta(G)}$ jednaka $\sqrt{1 \cdot \Delta(G)}$.

Ako je u čvor največeg stepena $\Delta(G)$ u grafu G, tada je $K_{1,\Delta(G)}$ podgraf grafa G, koga obrazuju čvor u i njegovi susedi (bez grana koje povezuju susede čvora u), tako da važi $\Lambda \geq \Lambda' = \sqrt{\Delta(G)}$.

252. a) Ako je x n-dimenzionalni vektor sa svim koordinatama jednakim $\frac{1}{\sqrt{n}}$, tada je $\|x\| = 1$ i

$$2 \sum_{\{u,v\} \in E(G)} x_u x_v = \frac{2|E(G)|}{n} = \frac{\sum_{u \in V(G)} d_u}{n} = \overline{d},$$

pa iz Rejlijevog odnosa sledi da je $\overline{d} \leq \Lambda$.

b) Ako je G regularan graf, tada važi jednakost $\overline{d} = \Lambda$, jer je najveća sopstvena vrednost G jednaka stepenu G.

Obratno, pretpostavimo da važi $\overline{d} = \Lambda$. Tada n-dimenzionalni vektor x sa svim koordinatama jednakim $\frac{1}{\sqrt{n}}$ predstavlja sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti Λ i iz $Ax = \Lambda x$ sledi da je $d_u = \Lambda$ za svako $u \in V(G)$, pa je G regularan graf.

c) S obzirom da je $\overline{d} = \frac{2|E(G)|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, ovo tvrdjenje sledi iz dela pod b).

253. Neka su $\lambda_1 = \Lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti grafa G. Kako ne postoje zatvorene šetnje dužine 1, to je

$$\Lambda + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0.$$

Broj zatvorenih šetnji dužine jednak je $2e$, pa je

$$\Lambda^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 2e.$$

Sada je, po Koši-Švarcovoj nejednakosti,

$$\Lambda^2 = (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n)^2 \leq (n-1)(\lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2) = (n-1)(2e - \Lambda^2),$$

odakle sledi nejednakost iz zadatka.

Glava 5

Zadaci sa matematičkih takmičenja

5.1 Zadaci

Zadaci iz kombinatorike i teorije grafova često se sreću na matematičkim takmičenjima skriveni iza naziva "logičko—kombinatorni zadaci", što je posledica činjenice da elementi teorije grafova još uvek nisu našli svoje mesto u nastavnom programu osnovnih i/ili srednjih škola.

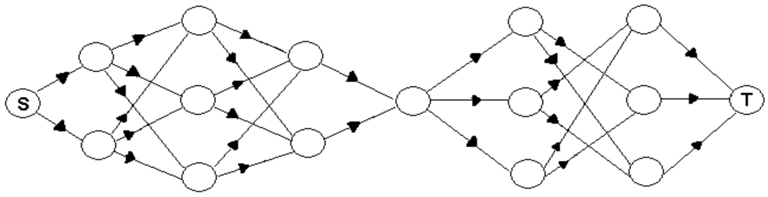
U ovoj glavi dato je nekoliko desetina zadataka koji su se pojavljivali uglavnom na republičkim i saveznim takmičenjima. Zadaci su dati u originalnoj postavci, a u rešenjima su date i alternativne postavke u terminima teorije grafova.

254. *VI razred, Savezno takmičenje 1997.* Na jednom ostrvu postoji ukupno 9 država. Dokazati da na ovom ostrvu postoji država koja medju njima ima paran broj prijateljskih država. Ako je država A prijateljska sa državom B, onda je i država B prijateljska sa državom A.

255. *VI razred, Savezno takmičenje 2001.* Bračni par Mirko i Ljubica pozovu na večeru svoje prijatelje, tri bračna para. Pošto su svi stigli istovremeno, počeli su da se rukuju, pri čemu se svako rukovao sa nekoliko ljudi, a niko se nije rukovao sa svojim bračnim drugom. Kada su završili sa rukovanjem, Mirko je pitao svakog (i Ljubicu) koliko se puta rukovao. Dobio je sedam različitih odgovora. Sa koliko se ljudi rukovala Ljubica?

256. *VII razred, Savezno takmičenje 1998.* Može li matematičkoj olimpijadi prisustvovati 1999 učesnika (računajući i goste), ako svaki od njih ima tačno 3 prijatelja medju učesnicima?

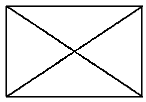
257. *I razred, B kategorija, Opštinsko takmičenje 2000.* Na sledećoj šemi dozvoljeno je kretati se putevima u smeru strelica:



Na koliko načina se može stići od čvora S do čvora T?

258. *I razred, Opštinsko takmičenje 1999.* U kutiju je stavljeno k manjih kutija. Zatim se u neke od manjih kutija stavlja po k još manjih kutija i ovaj proces se ponovi nekoliko puta. Ako je na kraju medju svim tim kutijama m napunjenih, koliko ima praznih (kutija je napunjena ako u njoj ima neka manja)?

259. *I razred, Pokrajinsko takmičenje 1990, Kosovo i Metohija.* Može li se jednim potezom nacrtati figura sa slike?



260. *I razred, Republičko takmičenje 1976.* U ravni je dato pet tačaka od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj. One se spajaju crvenim i plavim dužima i to tako da nikoje tri duži iste boje ne obrazuju trougao. Dokazati:
a) iz svake tačke polaze tačno dve plave i dve crvene duži;
b) postoji zatvorena izlomljena linija sastavljena od duži iste boje koja sadrži sve date tačke.

261. *I razred, Republičko takmičenje 1990.* U ravni je dat skup od šest tačaka, takvih da nikoje tri nisu kolinearne. Sve duži odredjene ovim tačkama obojene su ili plavom ili crvenom bojom.
a) Dokazati da postoji trougao čiji su vrhovi iz datog skupa tačaka i čije su sve stranice iste boje.
b) Dokazati da postoje dva trougla čiji su vrhovi iz datog skupa tačaka i čije su sve stranice iste boje.

262. *I razred, A i B kategorija, Republičko takmičenje 2003.* Svako od 20 ljudi šalje nekoj desetorici od ostalih po jedno pismo. Dokazati da postoje dve osobe koje su jedna drugoj poslale pismo.

263. *I razred, probno takmičenje na pripremama za Savezno takmičenje 1995.* U ravni je dato 9 tačaka takvih da nikoje tri od njih nisu kolinearne. Zatim su neki od parova tih tačaka spojeni dužima. Dokazati da se medju zadatim tačkama mogu naći 3 takve da su svake dve od njih spojene dužima, ili se mogu naći 4 takve da nikoje 2 od njih nisu spojene dužima.

264. *I razred, Savezno takmičenje 1980.* Grad ima 1980 raskršća, a u svakom od njih sastaju se po tri ulice. Postoji kružna autobuska linija, koja prolazi kroz svako raskršće tačno jedanput. Odlučeno je da se u svakoj ulici zasade stabla samo jedne od ovih vrsta drveća: kesten, breza i lipa. Dokazati da je to moguće učiniti tako da se u svakom raskršću sastaju tri drvoreda različitih vrsta.

265. *I razred, Savezno takmičenje 1981.* Jedan miš gricka parče sira u obliku kocke sa ivicom 3. Kocka sira podeljena je na 27 manjih kockica sa ivicom 1. Miš gricka sir na taj način što počinje sa kockicom u jednom od temena. Pojevši celu kockicu, prelazi na susednu, koja je sa upravo pojedenom imala zajedničku stranu. Da li miš može pojesti celo parče sira tako da poslednja kockica koju pojede bude ona u centru kocke?

266. *I razred, Savezno takmičenje 1990.* Car želi da sagradi dvorac u kojem će biti 1990 soba u jednom nivou, tako da važe sledeći uslovi:
1. Broj vrata na svakoj sobi je 0, 1 ili 2.
2. Izmedju svake dve sobe su najviše jedna vrata, a iz svake sobe na ulicu vode najviše jedna vrata.
3. Broj vrata prema ulici jednak je 19, a broj soba sa jednim vratima je 90.
Da li je moguće sagraditi takav dvorac?

267. *II razred, Okružno takmičenje 1999.* Na takmičenju se srelo 7 učenika. Svaki od njih govori najviše dva jezika. Dokazati da medju njima postoje tri tako da sva trojica govore istim jezikom ili da nikoja dva od te trojice ne govore zajedničkim jezikom.

268. *II razred, Republičko takmičenje 1998.* U jednoj grupi učenika, neki od njih se medjusobno poznaju. Pri tome, dva učenika koja imaju zajedničkog poznanika uvek poznaju različit broj učenika te grupe. Dokazati da postoji učenik koji poznaje samo jednog od preostalih učenika.

269. *II razred, probno takmičenje na pripremama za Savezno takmičenje 1995.* Na dvoru kralja Artura sakupilo se $2n$ vitezova, pri čemu svaki od njih, medju ostalim, ima najviše $n-1$ neprijatelja. Dokazati da Merlin, savetnik kralja Artura, može da rasporedi vitezove za okrugli sto tako da su svaka dva suseda prijatelji. (Prijateljstvo i neprijateljstvo su simetrični.)

270. *II razred, Savezno takmičenje 1984.* U nekoj državi izmedju svaka dva grada postoji jednosmerna avionska linija. Dokazati da postoji grad iz kojeg se u svaki drugi grad može stići avionom sa najviše jednim presedanjem.

271. *II razred, Savezno takmičenje 1997.* U svakoj od tri škole ima po n učenika. Svaki učenik poznaje bar $n+1$ učenika iz ostale dve škole. Dokazati da postoje tri učenika, po jedan iz svake škole, koji se medjusobno poznaju. (Poznanstvo je simetrična relacija.)

272. *III razred, Republičko takmičenje 1983, Bosna i Hercegovina.* Na jednom takmičenju svaki učesnik se bori sa svakim i nijedna borba se ne završava nerešeno. Dokazati da medju takmičarima postoji takav koji će prozvati sve učesnike, osim sebe, kada prozove sve učesnike koje je pobedio, kao i sve učesnike koji su pobedjeni od onih koje je pobedio.

273. *IV razred, Opštinsko takmičenje 1983.* Svaki grad u nekoj državi je povezan direktnim avionskim linijama sa tri druga grada. Iz svakog grada može se otići u bilo koji drugi grad sa najviše jednim presedanjem. Koliko najviše može biti gradova u toj državi?

274. *IV razred, Republičko takmičenje 1974.* U državi Zavrzlamiji ima n gradova. Treba ih povezati telefonskim linijama tako da budu ispunjeni uslovi:
1. svaka linija povezuje dva grada;
2. ima ukupno $n-1$ linija;
3. iz svakog od tih n gradova se može (direktno ili ne) razgovarati sa bilo kojim drugim gradom.
Na koliko se to načina može učiniti?

275. *IV razred, Republičko takmičenje 1978.* Neka se medju n ljudi nikoja tri medjusobno ne poznaju. Dokazati da je broj parova ljudi koji se uzajamno poznaju najviše $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

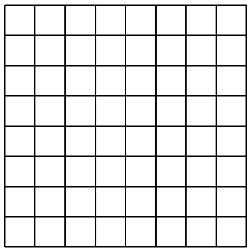
276. *IV razred, Republičko takmičenje 1988.* Na šahovskom prvenstvu škole učestvovalo je po nekoliko učenika I i II razreda. Svaka dva učenika su odigrala po jednu partiju i nijedna partija nije završena remijem. Svaki učenik I razreda pobedio je bar jednog i izgubio od bar jednog učenika II razreda. Svaki učenik II razreda pobedio je bar jednog i izgubio od bar jednog učenika I razreda. Dokazati da postoje učenici A_1 i A_2 iz I razreda i učenici B_1 i B_2 iz II razreda, takvi da važi:
A_1 je pobedio B_1 i izgubio od B_2;
A_2 je pobedio B_2 i izgubio od B_1.

277. *IV razred, Republičko takmičenje 2004.* Neka je A skup od šest elemenata. Dokazati da u svakoj familiji $\{A_1, A_2, \ldots, A_{11}\}$ različitih troelementnih podskupova od A, postoje tri različita skupa A_i, A_j i A_k koji su svi podskupovi istog četvoroelementnog skupa.

278. *IV razred, Savezno takmičenje 1972.* Koliki je maksimalan broj permutacija od n elemenata takvih da su svaka dva elementa susedna u najviše jednoj od permutacija?

279. *IV razred, Savezno takmičenje 1975.* U nekom društvu svaka dva poznanika nemaju zajedničkih poznanika, a svaka dva čoveka koji se ne poznaju imaju tačno dva zajednička poznanika. Dokazati da u tom društvu svi imaju jednak broj poznanika.

280. *IV razred, Savezno takmičenje 1976.* Grad ima kvadratnu mrežu sa m "horizontalnih" i n "vertikalnih" ulica (videti sliku). Kolika je najmanja dužina dela mreže koji treba asfaltirati tako da se od svake raskrsnice do bilo koje druge može doći asfaltom?



281. *III–IV razred, Savezno takmičenje 1988.* U jednoj državi ima više od 7 gradova. Dokazati da ne postoji mreža jednosmernih puteva sa sledećim osobinama:
a) Izmedju svaka dva grada postoji tačno jedan direktan put.
b) Za svaka dva grada A i B postoji tačno jedan grad u koji se direktno može stići i iz A i iz B.
c) Za svaka dva grada A i B postoji tačno jedan grad iz koga se direktno može stići i u A i u B.

282. *II BMO, 1985.* Na konferenciji učestvuje 1985 ljudi. U svakoj tročlanoj grupi postoje bar 2 osobe koje govore zajedničkim jezikom. Ako svaka osoba govori najviše pet jezika, dokazati da postoji 200 osoba na konferenciji koje govore zajedničkim jezikom.

283. *X BMO, 1994.* Naći najmanji broj $n > 4$ za koji postoji skup od n ljudi, tako da svaka dva koji se poznaju nemaju zajedničkih poznanika, a svaka dva koja se ne poznaju imaju tačno dva zajednička poznanika.

284. *VI IMO, 1964.* Sedamnaest naučnika se dopisuju, svaki sa svakim. Dopisivanje se obavlja na tri teme. Svaki par se dopisuje samo po jednoj temi. Dokazati da postoje bar tri naučnika, koji se medjusobno dopisuju na istu temu.

285. *XXXII IMO, 1991.* Dat je povezan graf G sa k ivica. Dokazati da se njegove ivice mogu numerisati svim brojevima 1,2,...,k tako da za svaki vrh v grafa koji je spojen ivicama sa bar dva druga vrha važi: najveći zajednički delilac svih brojeva, kojima su numerisane ivice čiji je jedan vrh v, jednak je 1.
(*Graf G* se sastoji od skupa tačaka koje se zovu *vrhovi*, zajedno sa skupom *ivica* koje spajaju neke parove različitih vrhova. Za graf G se kaže da je *povezan* ako za svaki par različitih vrhova $\{x, y\}$ postoji neki niz vrhova $x = v_0, v_1, v_2 \ldots, v_m = y$ takav da je svaki par vrhova v_i, v_{i+1} $(0 \leq i < m)$ spojen ivicom iz G.)

286. *XXXIII IMO, 1992.* U prostoru je dato n tačaka, od kojih nikoje četiri ne leže u jednoj ravni. Svake dve tačke su povezane pomoću duži. Duž može

biti obojena plavom ili crvenom bojom, ili može biti ostavljena neobojena. Naći najmanju vrednost n, takvu da pri proizvoljnom bojenju n duži postoji trougao čije su sve stranice obojene istom bojom.

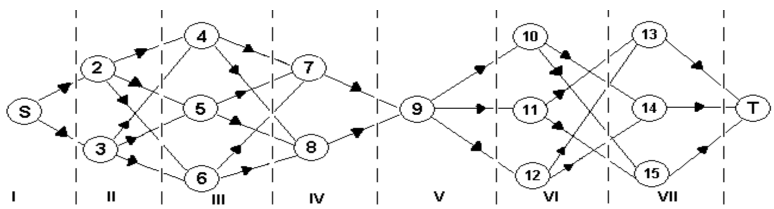
5.2 Rešenja

254. *Dokazati da u grafu G sa 9 čvorova postoji čvor parnog stepena.*
Pretpostavimo da su svi stepeni čvorova, $d_1, d_2, \ldots, d_9$ neparni. Tada je zbir $d_1+d_2+\ldots+d_9$ neparan broj, što je nemoguće jer je $d_1+d_2+\ldots+d_9 = 2m$, gde je m broj grana u G. Kako smo dobili kontradikciju, polazna pretpostavka nije tačna, pa graf ima čvor parnog stepena.

255. Ovo je zadatak 182 sa $n = 4$.

256. *Da li postoji regularan graf stepena 3 sa 1999 čvorova?*
Ne, jer je tada $2m = \sum_{i=1}^{1999} d_i = 1999 \cdot 3$, gde je m broj grana grafa G.

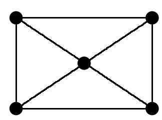
257. Podelimo vertikalnim linijama datu šemu na "oblasti":



Pri svakom prolasku jednim od puteva prelazimo u oblast sa rimskim brojem većim za jedan. Iz svakog od čvorova u okviru iste oblasti vodi jednak broj grana u sledeću oblast (redom, ovi brojevi su: 2,3,2,1,3,2,1). Stoga je ukupan broj puteva od S do T jednak $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$.

258. *Čvor r spojen je granama sa k listova. Zatim su neki od tih listova slično spojeni granama sa novih k listova... Ako na kraju u ovom stablu ima m čvorova stepena većeg od 1, koliko ima listova?*
Ukupan broj čvorova jednak je $mk + 1$ (za svaki od m čvorova stepena većeg od 1 imamo k čvorova "pod" njim i još koren stabla r). Kako je od toga m čvorova stepena većeg od 1, dobijamo da listova ima $mk + 1 - m$.

259. *Da li postoji Ojlerov put u grafu sa slike?*



Kako imamo jedan čvor stepena 4 i četiri čvora stepena 3, prema zadatku 215 graf ne sadrži Ojlerov put.

260. *Grane grafa K_n se boje crvenom i plavom bojom tako da ne postoji jednobojna kontura dužine 3. Dokazati:*
a) iz svakog čvora polaze tačno dve plave i dve crvene grane;
b) postoji jednobojna Hamiltonova kontura.
a) Pretpostavimo suprotno, da postoji čvor iz koga polaze bar 3 grane iste boje. Neka je to čvor a, a npr. plave grane ab, ac i ad. Zbog uslova zadatke grane bc, bd i cd ne mogu biti plave (jer bi imali plave trouglove abc, abd ili acd), tj. one su crvene, ali tada imamo crveni trougao bcd, što je nemoguće prema uslovu zadatka, pa je polazna pretpostavka pogrešna, tj. iz svakog čvora polaze po dve plave i dve crvene grane.
b) Neka je ab crvena grana. Iz b polazi tačno još jedna crvena grana (bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je to bc). Iz c polazi tačno još jedna crvena grana. Zbog crvenog trougla abc to ne može biti grana ac (bez umanjenja opštosti možemo uzeti da je to cd). Iz d polazi tačno još jedna crvena grana. To mora biti grana de (ne može db jer bi iz b vodile tri crvene grane, niti da jer tada iz e ne bi mogle voditi dve crvene grane). Iz e polazi tačno još jedna crvena grana i to mora biti grana ea, jer bi u protivnom iz nekog drugog čvora polazile tri crvene grane. Time smo dobili crvenu Hamiltonovu konturu $abcdea$. Kako su sve ostale grane plave imamo i plavu Hamiltonovu konturu $acebda$.

261. *Grane grafa K_6 obojene su plavom ili crvenom bojom.*
a) Dokazati da postoji kontura dužine 3 čije su sve grane obojene istom bojom.
b) Dokazati da postoje dve konture dužine 3 čije su sve grane obojene istom bojom.
Označimo čvorove grafa sa a, b, c, d, e, f.
a) Od grana iz čvora a, po Dirihleovom principu, bar tri su iste boje (npr. ab, ac i ad). Ako je neka od grana bc, bd ili cd te iste boje dobili smo traženu konturu, a ako su sve tri grane bc, bd ili cd suprotne boje onda one čine traženu konturu.
b) Na osnovu dela pod a) postoji jednobojna kontura. Neka je to abc i neka je ona plava. Razmotrimo grane ad, ae i af. Imamo sledeće mogućnosti:
1° Sve grane ad, ae i af su iste boje. Analogno kao u delu pod a) pokazujemo da je bar jedna od kontura ade, adf, aef ili def jednobojna.
2° Dve od grana ad, ae i af su plave (npr. ad i ae), a treća (af) je crvena. Ako je neka od grana cd, ce ili de plava imamo plavu konturu (acd, ace ili ade). Ako su sve crvene imamo crvenu konturu cde.
3° Dve od grana ad, ae i af su crvene (npr. ae i af), a treća (ad) je plava. Ako konture abd i aef nisu tražene, grana bd mora biti crvena, a ef plava. Ako bi i be i bf bile plave imamo plavu konturu bef. Pretpostavimo da je jedna od njih, npr. be crvena. Neposredno sledi da grana de mora biti plava (inače imamo crvenu konturu bde), bf plava (inače imamo crvenu konturu bdf), cd crvena (inače imamo plavu konturu acd) i cf plava (inače

imamo crvenu konturu bcf). Medjutim tada je kontura bcf plava.
Tako smo u svim slučajevima dobili dve konture od kojih je svaka obojena istom bojom.

262. *U orijentisanom grafu $G = (V, E)$ sa 20 čvorova, izlazni stepen svakog čvora jednak je 1 (*izlazni stepen *je broj grana koje vode iz čvora). Dokazati da tada postoje dva čvora u i v za koje postoje grane i iz u u v i iz v u u.*
U V postoji čvor u čiji je ulazni stepen bar 10 (*ulazni stepen* je broj grana koje vode u čvor), jer bi u suprotnom zbir izlaznih stepena bio manji od $9 \cdot 20 = 180$, a taj broj mora biti jednak zbiru ulaznih stepena, koji je $10 \cdot 20 = 200$. Iz u vodi 10 grana ka nekim od preostalih 19 čvorova i ka u vodi bar 10 grana od nekih od preostalih 19 čvorova. Ako ne bi došlo do preklapanja, pored u bi bilo još $10 + 10 = 20 > 19$ čvorova. Sledi da postoji čvor v takav da postoje grane i iz u u v i iz v u u.

263. *Dat je podgraf G kompletnog grafa K_9. Dokazati da ili graf G ima kao podgraf K_3 ili njegov komplement $\overline{G}$ ima kao podgraf K_4.*
Pre svega, nemoguće je da svaki čvor u G bude stepena 3: zbog zadatka 254 postoji čvor parnog stepena a i njegov je stepen različit od 3.
1° $d(v) \geq 4$. Ako su neka dva od suseda čvora a (neka su to b, c) spojeni granom, tada a, b, c čine 3 čvora koji su svi spojeni granom. U suprotnom imamo 4 čvora (susedi od a) od kojih nikoja dva nisu spojena granom.
2° $d(v) \leq 2$. Čvor a nije spojen sa nekih 6 čvorova. Prema zadatku 261.a) medju tih 6 čvorova postoje 3 čvora koji su svi spojeni granom ili 3 čvora od kojih nikoja dva nisu spojena granom (oni sa a daju 4 čvora od kojih nikoja dva nisu spojena granom).

264. *Dokazati da se grane 3-regularnog grafa koji poseduje Hamiltonovu konturu mogu obojiti u 3 boje tako da iz svakog čvora idu grane različitih boja.*
Grane u Hamiltonovoj konturi naizmenično bojimo dvema bojama. Kako je broj čvorova 3-regularnog grafa paran, prva i poslednja grana Hamiltonove konture biće obojene različito. Preostale grane obojimo trećom bojom. Time smo dobili traženo bojenje.

265. *Dat je graf sa skupom čvorova $V = \{v_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq 3\}$ u kome su čvorovi v_{abc} i v_{def} susedni akko je $((a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2 = 1$. Da li postoji Hamiltonov put koji počinje u $v_{1,1,1}$ i završava se u $v_{2,2,2}$?*
Ovaj graf je bipartitan: jednu particiju, V_1, čine čvorovi v_{ijk} kod kojih je zbir $i + j + k$ neparan, a drugu, V_2, oni kod kojih je paran. Bilo koji Hamiltonov put naizmenično prolazi kroz čvorove iz V_1 i V_2. Kako je 14 čvorova u V_1, a 13 u V_2, svi Hamiltonovi putevi moraju i da počinju i da se završavaju sa čvorom iz V_1. Ali kako je $v_{111} \in V_1$, a $v_{222} \in V_2$ traženi Hamiltonov put ne postoji.

266. *Da li postoji graf sa 1991 čvorova, koji ima jedan čvor stepena 19 i devedeset čvorova stepena 1, a ostali čvorovi su stepena 0 ili 2?*

Ovde smo spoljašnjost dvorca zamenili jednim čvorom i grane nam predstavljaju vrata. Odgovor je odrečan, jer je zbir stepena

$$\sum d_i = 19 + 90 \cdot 1 + k \cdot 0 + (1900 - k) \cdot 2$$

neparan broj, što je nemoguće jer je $\sum d_i = 2m$, gde je m broj grana grafa.

267. *U bipartitnom grafu $G = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, je $|V_1| = 7$ i svaki čvor iz V_1 ima stepen 2. Dokazati da tada postoje tri čvora iz V_1 koji su susedni sa istim čvorom iz V_2 ili postoje tri čvora iz V_1 za koje nikoja dva čvora nisu na rastojanju 2.*

Posmatrajmo proizvoljan čvor $a \in V_1$. Ako postoje dva od preostalih čvorova iz V_1 koji su susedni sa istim čvorom kao i a dobili smo traženu trojku čvorova. Ako, pak, za svaki od najviše 2 čvora sa kojima je a susedan postoji najviše jedan čvor koji je sa njim susedan, tada bar 4 čvora iz V_1 nemaju zajedničkog suseda sa a (označimo skup takvih čvorova sa B). Posmatrajmo medju tim čvorovima proizvoljan čvor $b \in B$. Ako postoje dva od preostalih čvorova iz B koji imaju zajedničkog suseda sa b dobili smo traženu trojku čvorova. Ako, pak, medju ostalim čvorovima iz B, za svaki od najviše 2 čvora sa kojima je b susedan postoji najviše jedan čvor koji je sa njim susedan, tada bar jedan čvor (označimo ga sa c) nema zajedničkog suseda sa b. Kako su $b, c \in B$ to oni nemaju zajedničkog suseda sa a, pa je a, b, c tražena trojka čvorova.

268. *U grafu G svaka dva čvora na rastojanju 2 imaju različite stepene. Dokazati da tada postoji čvor stepena 1.*

Posmatrajmo čvor v najvećeg stepena. Neka je $d(v) = k$. Njegovih k suseda moraju imati različite stepene i oni su veći ili jednaki 1 (jer su svi susedni sa v) i manji ili jednaki sa k (jer je k najveći stepen). Prema tome, jedan od tih čvorova mora biti stepena 1.

269. *Ako u grafu G sa $2n$ čvorova za stepen d svakog čvora važi nejednakost $d \geq n$, graf G poseduje Hamiltonovu konturu. Dokazati.*

Uzmimo proizvoljnu kružnu permutaciju čvorova grafa. Neka su nesusedni čvorovi a i b jedan do drugog u permutaciji (a pre b). Čvor a ima bar n suseda, a b ima najviše $n-1$ čvorova koji nisu susedni, pa negde u permutaciji postoje jedan za drugim čvorovi a' (susedan sa a) i b' (susedan sa b) tako da je a' pre b', tj. u kružnoj permutaciji imamo raspored $a, b, v_1, v_2, \ldots, v_k, a', b'$. Umesto ovoga rasporeda stavimo $a, a', v_k, \ldots, v_2, v_1, b, b'$ (čvorovi v_i se nalaze i dalje izmedju ista dva čvora), a umesto parova a, b (koji su nesusedni u grafu G) i a', b' sada imamo parove susednih čvorova a, a' i b, b'. Time smo smanjili broj nesusednih čvorova koji se nalaze jedan do drugog u kružnoj permutaciji. Kako u kružnoj permutaciji ima $2n$ parova čvorova jedan do drugog, ako nekoliko puta ponovimo ovaj postupak, dobićemo kružnu permutaciju u kojoj su jedan do drugog susedni čvorovi, odnosno konstruisali smo traženu Hamiltonovu konturu.

Napomena: Zadatak je direktna posledica Dirakove teoreme: Ako u grafu G sa n čvorova za stepen d svakog čvora važi nejednakost $d \geq \frac{1}{2}n$, graf G poseduje Hamiltonovu konturu.

270. *Dokazati da svaki turnir sadrži bar jednog kralja.*
U ovom zadatku se javljaju *orijentisani grafovi* ili *digrafi*, o kojima nije bilo reči u ovoj zbirci. Kod orijentisanog grafa sve grane $e = (u, v)$ su orijentisane, tj. bitan je redosled čvorova. Za granu $e = (u, v)$ kažemo da vodi iz čvora u u čvor v. Izlazni stepen čvora v, u oznaci $d^+(v)$, je broj grana koje vode iz čvora v. Ulazni stepen čvora v, u oznaci $d^-(v)$, je broj grana koje vode u čvor v. *Turnir* sa n čvorova, T_n, je kompletan graf K_n kod koga su sve grane orijentisane. Čvor v turnira T_n naziva se *kralj* ukoliko iz v u svaki drugi čvor iz T_n vodi orijentisan put dužine najviše 2. Gornje tvrdjenje je pokazao H. Landau 1953. godine. Za dalje upoznavanje sa ovom problematikom pogledati knjigu [12].
Pokazaćemo da je čvor v, sa najvećim izlaznim stepenom kralj. Pretpostavimo suprotno, da v nije kralj. Tada medju čvorovima iz kojih vodi grana u v postoji čvor w takav da ne postoji nijedan orijentisan put dužine 1 ili 2 koji vodi iz v u w. To znači da grana vodi iz w u v. Ukoliko bi za neki čvor u koji vodi grana iz v važilo da iz njega vodi grana u w tada bi postojao orijentisani put dužine 2 iz v u w, te stoga za sve čvorove u koji vodi grana iz v (neka njih ima k) važi da u njih vodi i grana iz w, što sa granom (w, v) (iz wu v) daje da za izlazni stepen čvora w važi:

$$d(w) \geq k + 1 > k = d(v),$$

što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom da je v čvor najvećeg izlaznog stepena. Dakle, v je kralj.

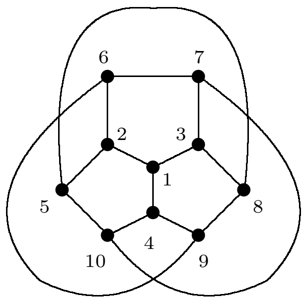
Napomena: Može se pokazati i sledeće tvrdjenje: Za svako $n \geq 5$ i $n = 3$ postoji turnir T_n čiji su svi čvorovi kraljevi.

271. *U tripartitnom grafu $G = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \emptyset$, je $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$ i svaki čvor iz V ima stepen bar $n + 1$. Dokazati da tada postoje tri čvora, po jedan iz V_1, V_2 i V_3 koji su susedni.*

Pretpostavimo suprotno. Neka je a čvor iz koga ide najviše grana, k, u jednu particiju. Neka je $a \in V_1$ i neka iz njega ide k grana do V_2. Kako je a susedan sa $n + 1$ čvorova iz V_2 i V_3, on je susedan sa čvorom $c \in V_3$. Čvor c je susedan sa najviše $n - k$ čvorova iz V_2 (u suprotnom bi a i c imali zajedničkog suseda iz V_2), pa sledi da je on susedan sa bar $n + 1 - (n - k) = k + 1$ čvorova iz V_1, što je kontradikcija.

272. *Dokazati da svaki turnir sadrži bar jednog kralja.*
Videti zadatak 270.

273. *Koliko najviše čvorova može imati 3-regularan graf dijametra 2?*
Neka je čvor 1 spojen sa čvorovima 2, 3 i 4. Iz čvorova 2, 3 i 4 idu još po dve grane do čvorova 5,6; 7,8 i 9,10. Kada bi postojao još jedan čvor (11), tada bi rastojanje čvora 1 i čvora 11 bilo veće od 2, $d(1,11) > 2$. Dakle, ima najviše 10 čvorova. Treba pokazati da je to moguć slučaj. Primer je dat na slici (proverom se lako vidi da su svi uslovi ispunjeni).



274. *Koliko ima razapinjućih stabala kompletnog grafa K_n?*
n^{n-2} – ovo je tvrdjenje Kejlijeve teoreme.
I način: Označimo čvorove u K_n sa $1, 2, \ldots, n$. Neka je T razapinjuće stablo. U njemu postoje bar 2 lista. Prvi od listova koji se nalazi u nizu $1, 2, \ldots, n$ označimo sa a_1, a sa b_1 jedinog njegovog suseda. Udaljavanjem iz stabla T čvora a_1 sa granom a_1b_1 dobijamo stablo T_1 sa $n-1$ čvorem. U njemu opet postoji list. Prvi od listova koji se nalazi u nizu $1, 2, \ldots, n$ označimo sa a_2, a sa b_2 jedinog njegovog suseda... Ovaj postupak ponavljamo sve dok posle odbacivanja grane $a_{n-2}b_{n-2}$ ne ostane samo grana $a_{n-1}b_{n-1}$ koja spaja dva preostala čvora.
Na taj način smo svakom razapinjućem stablu T na jednoznačan način pridružili $(n-2)$-torku $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$ i različitim razapinjućim stablima odgovaraju dve različite $(n-2)$-torke. Obrnutom konstrukcijom pokazujemo da svakoj $(n-2)$-torci $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$ (gde su b_i neki od brojeva $1, 2, \ldots, n$) odgovara jedno razapinjuće stablo: svi brojevi koji se ne javljaju u $(n-2)$-torci $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$ su listovi i najmanji od njih je a_1 koji je spojen sa b_1 i tako smo dobili granu a_1b_1. Analogno dobijamo i ostale grane.
Time smo pokazali da je ova konstrukcija bijekcija izmedju broja razapinjućih stabala i broja $(n-2)$-torki $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$ (gde su b_i neki od brojeva $1, 2, \ldots, n$), kojih ima n^{n-2}.
II način: Uočimo neki čvor u iz K_n. Označimo sa $t(n,k)$ broj razapinjućih stabala u kojima taj čvor ima stepen k, $d(u) = k$. Tada je očigledno

$$t(K_n) = \sum_{k=1}^{n-1} t(n,k).$$

Nazovimo svežnjem par razapinjućih stabala A i B, takvih da je $d_A(u) = k-1$ i $d_B(u) = k$ i da stabla imaju po $n-2$ zajedničke grane, a one dve

grane (jedna je uv) koje nisu zajedničke su incidentne sa istim čvorom $v \neq u$ i svih tih n grana čini unicikličan graf sa konturom koja prolazi i kroz u i kroz v.
U A je $d_A(u) = k-1$. Graf B možemo dobiti tako što čvor u spojimo sa proizvoljnim čvorom v sa kojim nije susedan (v možemo izabrati na $n-k$ načina), a onda iz konture izbacimo granu vw iz v ($vw \neq vu$). Stoga svežnjeva ima $(n-k)\cdot t(n,k-1)$.
U B je $d_B(u) = k$. Ako bi odstranili čvor v graf B bi se raspao na k komponenti povezanosti: $B_1, \dots, B_k$ (neka je $v_i \in B_i$ čvor koji je susedan sa u i $|B_k| = n_k$). Graf A možemo dobiti tako što odstranimo proizvoljnu granu uv_i, a zatim čvor v_i spojimo sa proizvoljnim čvorom v iz neke druge komponente povezanosti. Ovu operaciju možemo izvršiti na

$$n-1-n_1+n-1-n_2+\ldots+n-1-n_k = k\cdot(n-1)-(n-1) = (k-1)(n-1)$$

načina. Stoga svežnjeva ima $(k-1)(n-1)\cdot t(n,k)$.
Dobili smo rekurentnu relaciju

$$(n-k)\cdot t(n,k-1) = (k-1)(n-1)\cdot t(n,k),$$

iz koje dobijamo

$$\begin{aligned}
(n-k-1)\cdot t(n,k) &= k(n-1)\cdot t(n,k+1),\\
(n-k-2)\cdot t(n,k+1) &= (k+1)(n-1)\cdot t(n,k+2),\\
&\dots\\
(n-(n-1))\cdot t(n,n-2) &= (n-2)(n-1)\cdot t(n,n-1).
\end{aligned}$$

Kako je $t(n,n-1) = 1$ (samo imamo zvezdu $K_{1,n-1}$) kada izmnožimo sve ove jednakosti dobijamo $(n-k-1)!\cdot t(n,k) = \frac{(n-2)!}{(k-1)!}(n-1)^{n-k-1}\cdot 1$, odnosno

$$t(n,k) = (n-1)^{n-k-1}\binom{n-2}{n-k-1} = (n-1)^{n-k-1}\binom{n-2}{k-1}.$$

Odatle dobijamo da razapinjućih stabala ima

$$t(K_n) = \sum_{k=1}^{n-1}(n-1)^{n-k-1}\binom{n-2}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-2}(n-1)^{n-i-2}\binom{n-2}{i}$$

$$t(K_n) = [(n-1)+1]^{n-2} = n^{n-2}.$$

III način: Na osnovu teoreme o matricama i stablima (sa $s = t = 1$) imamo da je broj razapinjućih stabala jednak sledećoj determinanti reda $n-1$:

$$t(K_n) = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Ako prvoj vrsti dodamo preostale vrste dobijamo vrstu sa svim elementima 1. Zatim tu vrstu dodamo svim ostalim i dobijamo

$$t(K_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

Napomena: Ovo tvrdjenje se može pokazati i pomoću zadatka 208.

275. *Dokazati da graf sa n čvorova u kome nema konture dužine 3 ima najviše $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ grana.*

Označimo sa m_n maksimalan broj grana. Prvo ćemo pokazati matematičkom indukcijom sa korakom 2 da je $m_n \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Baza indukcije: Za $n = 2$ i $n = 3$ je $m_2 = 1 = \left[\frac{2^2}{4}\right]$ i $m_3 = 2 = \left[\frac{3^2}{4}\right]$.

Indukcijska pretpostavka: Pretpostavimo da za $n = k$ važi $m_k \leq \left[\frac{k^2}{4}\right]$.

Indukcijski korak: U grafu sa $n = k + 2$ čvora posmatrajmo dva čvora koji su susedni. Tada je svaki od ostalih k susedan sa najviše jednim od ta dva, a po indukcijskoj pretpostavci grana sa krajevima u tih k čvorova ima ne više od $\left[\frac{k^2}{4}\right]$, tj. imamo

$$m_{k+2} \leq 1 + k + m_k \leq 1 + k + \left[\frac{k^2}{4}\right].$$

Kako je $n + 1$ ceo broj, važi:

$$m_{k+2} \leq 1 + k + \left[\frac{k^2}{4}\right] = \left[\frac{k^2}{4} + k + 1\right] = \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right] = \left[\frac{(k+2)^2}{4}\right].$$

Time smo na osnovu principa matematičke indukcije pokazali da $m_n \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$ važi za svaki prirodan broj n.

Da bismo pokazali da se ova granica dostiže sada ćemo efektivno konstruisati graf sa n čvorova bez trougla u kome je $m_n = \left[\frac{n^2}{4}\right]$. Ovo ćemo posebno uraditi za parne i posebno za neparne brojeve.

1° $n = 2k$: $m_n = \left[\frac{(2k)^2}{4}\right] = k^2$. Lako se vidi da kompletan bipartitan graf $K_{k,k}$ zadovoljava uslove.

2° $n = 2k + 1$: $m_n = \left[\frac{(2k+1)^2}{4}\right] = k^2 + k$. Lako se vidi da kompletan bipartitan graf $K_{k+1,k}$ zadovoljava uslove.

276. *U turniru je skup čvorova podeljen na dva skupa A i B, $V = A \cup B$. Za svaki čvor $x \in A$ postoje $y, z \in B$, takvi da je $xy, zx \in E$. Za svaki čvor $x \in B$ postoje $y, z \in A$, takvi da je $xy, zx \in E$. Dokazati da postoje čvorovi*

$a_1, a_2 \in A$ i $b_1, b_2 \in B$ takvi da je $a_1b_1, b_2a_1, a_2b_2, b_1a_2 \in E$.
Neka je a_1 čvor iz A iz koga vodi najviše grana u čvorove iz B (i neka su ti čvorovi $c_1, c_2, \ldots, c_k$). Neka je $b_2 \in B$ čvor iz koga vodi grana u a_1 i neka je $a_2 \in A$ čvor iz koga vodi grana u b_2 (takvi čvorovi postoje na osnovu uslova zadatka). Iz a_2 ne vode grane u sve od čvorova $c_1, c_2, \ldots, c_k$, jer bi u tom slučaju iz a_2 vodilo bar $n+1$ grana u B, dakle više nego a_1 (što je u suprotnosti sa izborom a_1). Neka je b_1 onaj čvor od čvorova $c_1, c_2, \ldots, c_k$ iz koga vodi grana u a_2. Tada za čvorove a_1, a_2, b_1 i b_2 važi tvrdjenje zadatka.

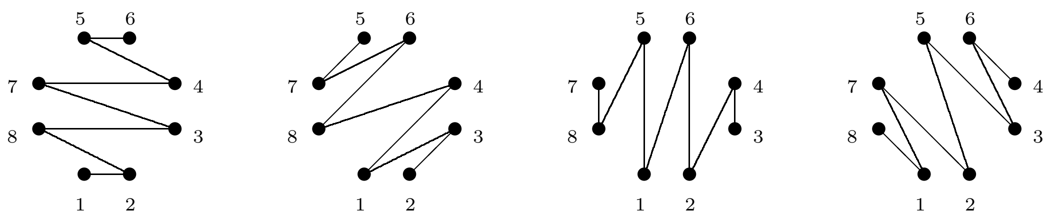
Napomena: kod turnira je uobičajeno da ako je igrač a pobedio b, granu izmedju ta dva čvora orijentišemo tako da vodi od čvora a ka čvora b.

277. Postoji ukupno $\binom{6}{3} = 20$ troelementnih podskupova A i $\binom{6}{4} = 15$ četvoroelementnih podskupova A. Napravimo graf čiji su čvorovi svih tih 35 skupova, a dva čvora su povezana granom akko je jedan od njih pravi podskup drugog. Očigledno, mogu da postoje grane samo izmedju troelementnih i četvoroelementnih čvorova. Ovaj graf je bipartitan. Za svaki troelementni čvor, postoje tačno 3 čvora sa kojima je povezan, a za svaki četvoroelementni čvor postoji tačno 4 čvora sa kojima je povezan (ukupan broj grana je 60).
Dalje, uočimo podgraf ovog grafa koji se dobija tako što obrišemo nekih 9 troelementnih čvorova i sve grane koje su u njih ulazile. Ovaj graf će odgovarati našoj familiji skupova iz postavke zadatka. Preostalo nam je 33 grane, a kako svaka grana povezuje neki troelementni čvor i neki četvoroelementni čvor, znači da je bar jedan od 15 četvoroelementnih čvorova povezan sa više od dva troelementna čvora. To su traženi troelementni skupovi.

278. *Koliko se najviše granski disjunktnih razapinjućih puteva može izdvojiti iz kompletnog grafa K_n?*
Svaki razapinjući put sadrži $n-1$ grana, a K_n ima $\frac{n(n-1)}{2}$ grana. Stoga mora biti $k \cdot (n-1) \le \frac{n(n-1)}{2}$, gde je k maksimalni broj granski disjunktnih razapinjućih puteva. Stoga je

$$k \le \left[\frac{n}{2}\right].$$

Jednakost se dostiže. Za $n = 8$ to se vidi iz sledećeg primera



Sličan primer postoji za svako n.

279. *Neka u grafu G dijametra 2 bez trouglova svaka dva nesusedna čvora imaju tačno 2 zajednička suseda. Dokazati da je graf G regularan.*
I način: Neka su čvorovi u i v susedni, i neka je $N_G(u) = \{v, u_1, \ldots, u_n\}$ skup suseda čvora u. Kako su u i v susedni, oni nemaju zajedničkih suseda, pa v nije susedan ni jednom čvoru u_i. Znači, za svako u_i, čvorovi u_i i v imaju tačno dva zajednička suseda. Neka su to u i v_i. Iz $v_i{=}u_j$ sledi da susedni čvorovi u i u_i imaju zajedničkog suseda u_j, što je kontradikcija. Iz $v_i{=}v_j$ sledi da u i v_i imaju tri zajednička suseda (v, u_i i u_j), što je kontradikcija. Znači funkcija $f : N_G(u) \to N_G(v)$ definisana sa $f(u_i) = v_i$ i $f(v) = u$ je $1-1$ pa važi $d(u) \leq d(v)$. Zamenom uloga za u i v, potpuno analogno, dobijamo da važi i $d(v) \leq d(u)$, odnosno $d(u) = d(v)$.
Ako čvorovi u i v nisu susedni, onda oni imaju dva zajednička suseda, w i t. Pošto su u i w, kao i w i v susedni, važi $d(u) = d(w) = d(v)$. Time smo pokazali da svi čvorovi imaju jednak broj suseda.

II način: Neka je v proizvoljan čvor iz tog grafa, a $v_1, v_2, \ldots, v_r$ svi njegovi susedi. Čvorovi v_i i v_j nisu susedni (inače bi postojao trougao), te imaju tačno 2 zajednička suseda: v i v_{ij}. Nikoja dva čvora v_{ij} se ne poklapaju (inače bi v i v_{ij}, koji nisu susedni zbog trouglova, imali bar 3 zajednička suseda). Čvorovi v,$v_1, \ldots, v_r$,$v_{12}, \ldots, v_{r-1,r}$ su svi čvorovi grafa G, jer su v_{ij} svi čvorovi u G koji nisu susedni sa v, te je ukupan broj čvorova u tom grafu

$$n = 1 + r + \frac{r(r-1)}{2}, \text{ odakle je } r^2 + r - (2n-2) = 0.$$

Odatle dobijamo $r = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2n - 2}$. Vrednost $r < 0$ otpada, pa je $r = \frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}$. Kako je n konstantno, to je i r konstantno. S obzirom da je v proizvoljno odabrani čvor grafa G, zaključujemo da svi čvorovi imaju isti broj suseda, tj. graf je r-regularan.

280. *Dat je graf sa skupom čvorova $V = \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ u kome su čvorovi v_{ab} i v_{cd} susedni akko je $((a-c)^2 + (b-d)^2 = 1$. Koliko najmanje grana ima povezan podgraf ovog grafa?*
Najmanji povezan graf sa mn čvorova je stablo i ono ima $mn - 1$ granu.

281. *Dokazati da ne postoji turnir sa $n \geq 7$ čvorova u kome za svaka dva čvora x i y postoji tačno jedan čvor z takav da grana vodi i iz x i iz y u z i tačno jedan čvor w takav da grana vodi i u x i u y iz w.*
Neka je $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ skup čvorova, a E skup orijentisanih grana turnira. Označimo sa B_k skup svih čvorova u koje vodi grana iz a_k, tj. $B_k = \{a_i \mid a_k a_i \in E\}$, a sa C_k skup svih čvorova iz kojih vodi grana u a_k, tj. $C_k = \{a_i \mid a_i a_k \in E\}$. Ako za neko i važi $a_i \in B_k$, onda iz uslova zadatka sledi da postoji tačno jedan čvor a_j takav da je $a_j a_i \in E$ i $a_j a_k \in E$, pa za taj grad a_j važi $a_j \in C_k$. Stoga je $|B_k| \leq |C_k|$. Analogno, korišćenjem drugog uslova dobijamo da je $|C_k| \leq |B_k|$. Prema tome, za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi $|B_k| = |C_k| = r$, pri čemu je n neparan broj,

$n = 2r + 1$. Označimo sa

$$S_k = \{(i,j) \mid i < j, a_k a_i \in E, a_k a_j \in E\}.$$

Iz poslednjeg uslova sledi da za svaki par (i,j), $i < j$, postoji tačno jedan broj $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, takav da važi $(i,j) \in S_k$. Stoga su skupovi $S_1, S_2, \ldots, S_{2r+1}$ disjunktni i njihova unija je ceo skup E. Iz $|B_k| = r$ dobijamo da je $|S_k| = \binom{r}{2}$ za svako k. Na osnovu svega ovog dobijamo

$$\binom{2r+1}{2} = |E| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_{2r+1}| = (2r+1)\binom{r}{2}.$$

Iz ove jednakosti dobijamo $r = 3$, tj. $n = 7$, što je isključeno postavkom zadatka.

Napomena: Može se konstruisati turnir sa 7 gradova koji zadovoljava uslove zadatka.

282. *U bipartitnom grafu $G = (V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, je $|V_1| = 1985$ i svaki čvor iz V_1 ima stepen $d \leq 5$. Ako medju svaka tri čvora iz V_1 postoje dva na rastojanju 2, dokazati da postoji čvor w iz V_2 stepena $d(w) \geq 200$.*
Razmotrićemo sledeća dva slučaja.
1° Svaka dva čvora iz V_1 imaju zajedničkog suseda iz V_2. Proizvoljan čvor a ima zajedničkog suseda sa svakim od preostalih 1984 čvorova i to je neki od (najviše) 5 suseda čvora a. Stoga postoji čvor iz $w \in V_2$ koji je stepena $\left\lceil \frac{1984}{5} \right\rceil > 200$.
2° Postoje čvorovi a i b koji nemaju zajedničkog suseda iz V_2. Tada svaki od preostalih 1983 čvorova ima zajedničkog suseda sa a ili sa b (moguće je i sa oba). Prema tome, bar $\lceil \frac{1983}{2} \rceil = 992$ čvora ima zajedničkog suseda sa jednim od a ili b, recimo a. To znači da postoji čvor $w \in V_2$ koji je susedan sa a i sa bar još $\lceil \frac{992}{5} \rceil = 199$ čvorova iz V_1.

283. *Naći najmanji graf G dijametra 2 bez trouglova sa $n > 4$ čvorova u kome svaka dva nesusedna čvora imaju tačno 2 zajednička suseda.*

Neka je v proizvoljan čvor grafa G, i neka je $N_G(v) = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ skup suseda čvora v, a $N_{\overline{G}}(v) = \{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ skup svih čvorova koji nisu susedni sa v. Postoji bijekcija izmedju skupa $N_{\overline{G}}(v)$ i skupa svih uredjenih parova (w_i, w_j), gde je $1 \leq i, j \leq p$, $i \neq j$. Kako nikoja dva čvora iz $N_G(v)$ ne mogu biti susedni (jer bi činili trougao sa v), to su i w_i i w_j nesusedni, pa prema uslovu zadatka imaju tačno 2 zajednička suseda v i t. Čvor t nije susedan sa v (inače bi imali trouglove vw_it i vw_jt) pa je $t \in N_{\overline{G}}(v)$.

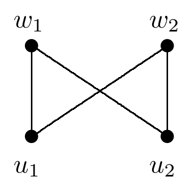
Obrnuto, ako t ne poznaje v, tada po uslovu zadatka postoje tačno dva čvora v_i i v_j koji su zajednički susedi od t i v. Par (v_i, v_j) korespondiramo čvoru t (čak možemo t označiti sa $t = v_{ij}$). Ova korespodencija je i injektivna (već smo pokazali surjektivnost). Zaista ako su (v_i, v_j) i (v_k, v_l) različiti parovi koji korespondiraju istom čvoru t koji nije susedan sa čvorom v, tada medju čvorovima v_i, v_j, v_k, v_l postoje najmanje 3 različita zajednička suseda čvorova v i t, što je nemoguće. Na osnovu prethodno rečenog zaključujemo da je

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{i prema tome} \quad n = \frac{p(p-1)}{2} + p + 1.$$

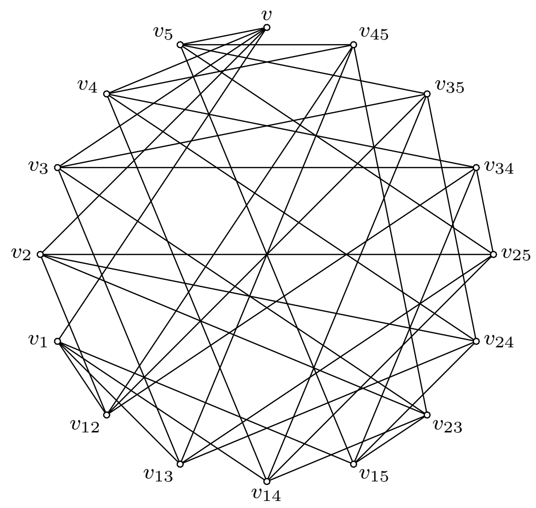
Dakle, $p^2 + p - 2(n-1) = 0$ i ta jednačina ima tačno jedno pozitivno rešenje. Prema tome, broj p je isti za sve čvorove datog grafa, tj. G je regularan. (Do ovog rezultata smo mogli doći isto kao u II načinu za rešavanje zadatka 279) Dalje dobijamo:

$$\begin{array}{llll}
\text{ako je} & p=1, & \text{onda je} & n=2; \\
\text{ako je} & p=2, & \text{onda je} & n=4; \\
\text{ako je} & p=3, & \text{onda je} & n=7; \\
\text{ako je} & p=4, & \text{onda je} & n=11; \\
\text{ako je} & p=5, & \text{onda je} & n=16; \quad \text{itd.}
\end{array}$$

Razmotrimo slučaj $p \geq 3$. Sledi da postoje dva čvora w_1 i w_2 koji nisu susedni. Na osnovu uslova zadatka postoje tačno dva čvora u_1 i u_2 koji su zajednički susedi čvorova w_1 i w_2. Imamo sledeći graf:



Iz svakog čvora ide još $(p-2)$ ivica grafa. Dakle, graf G ima najmanje $4(p-2)+4 = 4p-4$ grana. Dalje dobijamo da je $n \geq 4p-4$, što ne važi za $p=3$ i $p=4$. Slučaj $p=5$ (tj. $n=16$) ima konkretnu realizaciju: Neka su čvorovi $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_5, v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{45}$ i neka su susedni sledeći čvorovi:
v i v_i, $1 \leq i \leq 5$;
v_i i v_{ij}, odnosno v_j i v_{ij}, $1 \leq i < j \leq 5$;
v_{ij} i v_{kl}, $1 \leq i < j \leq 5$, $1 \leq i < j \leq 5$, $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$. Ovaj graf zadovoljava uslove zadatka.



284. *U kompletnom grafu K_{17} sve grane su obojene jednom od tri date boje. Dokazati da postoji jednobojna kontura dužine 3.*
Odaberimo proizvoljan čvor v iz K_{17}. Iz njega vodi 16 grana koje su obojene u 3 boje, te stoga, po Dirihleovom principu, postoji bar 6 čvorova iz K_{17} koji su sa v spojeni granama iste boje, npr. žute. Ako izmedju tih 6 čvorova postoji neka žuta grana dobili smo traženi trougao. U suprotnom su sve grane izmedju ovih 6 čvorova obojene drugim dvema bojama i to je sada problem zadatka 261.a). Kako i u tom slučaju postoji ili plavi ili crveni trougao, dobili smo da uvek postoji trougao čije su grane obojene istom bojom.

285. Numerisaćemo ivice grafa na sledeći način. Neka je v_0 proizvoljno teme grafa. Proizvoljnu ivicu čiji je kraj v_0 numerišimo brojem 1. Neka je drugi kraj te ivice teme v_1. Ako iz v_1 polazi još neka ivica njoj dodelimo broj 2 (njen drugi kraj je novo teme v_2). Ako iz v_2 polazi još neka ivica njoj dodelimo broj 3 (njen drugi kraj je novo teme v_3). Ovako nastavljamo numerisanje ivica grafa sve dok je to moguće. Ako nisu sve ivice numerisane, onda iz nekog temena na putu koji se sastoji od numerisanih ivica polazi bar jedna ivica koja nije numerisana (u protivnom graf ne bi bio povezan). Proizvoljnu takvu ivicu numerišemo najmanjim prirodnim brojem koji prethodno nije upotrebljen, a zatim nastavimo numerisanje kao ranije sve dok je to moguće. Ovim postupkom ćemo numerisati sve ivice grafa.

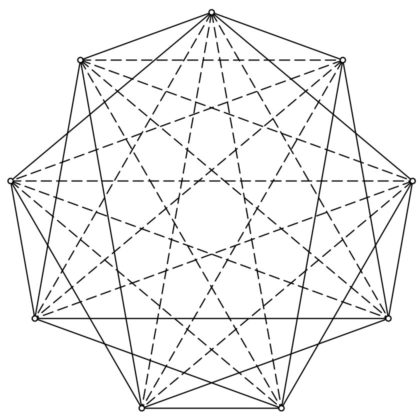
Dokažimo da ovo numerisanje ispunjava uslove zadatka. Neka je v proizvoljan čvor grafa stepena većeg od 1. Ako je $v = v_0$ onda je jedna ivica iz v numerisana brojem 1, pa je i odgovarajući NZD jednak 1. Ako je $v \neq v_0$, onda uočimo onu od ivica sa krajem v koja je numerisana najmanjim prirodnim brojem, k. Iz postupka numerisanja sledi da je i jedna ivica sa krajem v numerisana i brojem $k+1$. Kako je $\mathrm{NZD}(k, k+1) = 1$, to je i odgovarajući NZD jednak 1. Time smo pokazali da za svaki vrh v grafa stepena većeg od 1 važi: NZD svih brojeva, kojima su numerisane ivice čiji je jedan vrh v, jednak je 1.

286. *Naći najmanju vrednost n, takvu da pri proizvoljnom bojenju n grana kompletnog grafa K_9 plavom ili crvenom bojom postoji trougao (kontura dužine 3) koja je obojena istom bojom.*

I način: Najmanji broj n koji zadovoljava uslov zadatka je $n = 33$.

Neka su obojene 33 grane, tj. neka samo 3 nisu. Možemo odabrati 3 čvora tako da svaka od neobojenih grana ima bar jedan od krajeva u jednom od izabranih čvorova. To znači da su svaka 2 od preostalih 6 čvorova povezani obojenom granom. Prema zadatku 261.a), medju tih 6 čvorova postoje 3 koja su povezani istobojnim granama.

Sledeća slika pokazuje da se mogu obojiti 32 duži tako da stranice nijednog trougla ne budu obojene istom bojom. (Pune linije predstavljaju crvene duži, a isprekidane plave).



II način: Koristićemo dve poznate teoreme iz teorije grafova:

Remzijeva teorema. Neka su k i l prirodni brojevi. Postoji prirodan broj n koji ima sledeće svojstvo: ako su grane kompletnog grafa K_n obojene plavom i crvenom bojom, onda postoji podgraf K_k čije su grane obojene plavom bojom, ili postoji podgraf K_l čije su grane obojene crvenom bojom. Najmanji prirodan broj koji ima dato svojstvo obeležavamo sa $r(k, l)$.

Turanova teorema. Neka graf G ima n čvorova i m grana.
a) Ako G ne sadrži podgraf K_k onda je

$$m \leq \binom{n}{2} - r\binom{q+1}{2} - (k-1-r)\binom{q}{2},$$

gde je q količnik, a r ostatak koji se dobija prilikom deljenja broja n brojem $k-1$.
b) Ako je
$$m = \binom{n}{2} - r\binom{q+1}{2} - (k-1-r)\binom{q}{2},$$
onda G ne sadrži podgraf K_k ako i samo ako njegov komplement ima $k-1$ komponentu, od kojih su njih r kompletni grafovi reda $q+1$, dok su preostalih $k-1-r$ kompletni grafovi reda q.

Uvedimo oznaku $t(n,k) = \binom{n}{2} - r\binom{q+1}{2} - (k-1-r)\binom{q}{2}$. Pomoću prethodne dve teoreme možemo izvesti sledeću teoremu koja je uopštenje tvrdjenja zadatka:

Teorema. Neka su n, k i l prirodni brojevi, takvi da je $t(n, r(k,l)) < \binom{n}{2}$. Ako je u grafu K_n obojeno $t(n, r(k,l))+1$ grana plavom ili crvenom bojom, onda postoji podgraf K_k čije su grane obojene plavom bojom, ili postoji podgraf K_l čije su grane obojene crvenom bojom. Postoji takvo bojenje $t(n, r(k,l))$ grana grafa K_n plavom i crvenom bojom takvo da nijednom podgrafu K_k nisu sve grane obojene plavom bojom i nijednom podgrafu K_l nisu sve grane obojene crvenom bojom.

Dokaz. Neka je $t(n, r(k,l)) + 1$ grana grafa K_n obojeno plavom i crvenom bojom. Prema Turanovoj teoremi postoji kompletan graf reda $r(k,l)$ čije su sve grane obojene. Prema Remzijevoj teoremi taj podgraf ima podgraf K_k čije su grane obojene plavom bojom, ili postoji podgraf K_l čije su grane obojene crvenom bojom. Time je dokazan prvi deo teoreme.

Neka su grane grafa $K_{r(k,l)-1}$ obojene plavom i crvenom bojom, tako da nijedan podgraf K_k nema sve grane obojene plavom i da nijedan podgraf K_l nema sve grane obojene crvenom bojom. Čvorove ovog grafa označimo sa v_j $(j = 1, 2, \ldots, r(k,l)-1)$, a sa e_{ij} granu koju spaja čvorove v_i i v_j. Neka su q i r količnik i ostatak koji se dobijaju prilikom deljenja broja n brojem $r(k,l)-1$. Skup čvorova grafa K_n razložimo na $r(k,l)-1$ podskupova V_j, tako da r od njih sadrže po $q+1$ čvor, a da preostalih $r(k,l)-1-r$ sadrže po q čvorova. Grane koje povezuju čvorove iz skupova V_i i V_j, $1 \le i,j \le r(k,l)-1$, obojimo bojom grane e_{ij} grafa $K_{r(k,l)-1}$. Lako je pokazati da će na taj način biti obojeno $t(n, r(k,l))$ grana grafa K_n, a da pri tom ne postoji podgraf K_k čije su sve grane obojene plavom bojom i ne postoji podgraf K_l čije su sve grane obojene crvenom bojom. Time je dokaz teoreme kompletiran.

Na osnovu prethodne teoreme dobijamo da je traženi broj jednak
$$t(9, r(3,3)) + 1 = t(9,6) + 1 = \binom{9}{2} - 4\binom{1+1}{2} - (6-1-4)\binom{1}{2} + 1 = 33.$$

Jednakost $r(3,3) = 6$ je pokazana u zadatku 261.a).

Literatura

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, II izdanje, Springer, Berlin, 2001.

[2] N. Biggs, *Discrete mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[3] D.M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs: theory and applications*, III izdanje, Barth, Heidelberg, 1995.

[4] D. Cvetković, S. Simić, *Diskretna matematika, Matematika za kompjuterske nauke*, II izdanje, Prosveta, Niš, 1996.

[5] D. Cvetković, S. Simić, *Kombinatorika, klasična i moderna*, II izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[6] R. Diestel, *Graph Theory*, II izdanje, Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1969.

[8] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, I deo, II izdanje, Addison-Wesley, Reading, 1969.

[9] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[10] P. Mladenović, *Kombinatorika*, III izdanje, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2001.

[11] J. Matoušek, J. Nešetril, *Invitation to discrete mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[12] V. Petrović, *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998.

[13] R.P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, I deo, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[14] I. Tomescu, *Problems in combinatorics and graph theory*, Wiley, Chichester, 1985.

[15] R. Tošić, *Kombinatorika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 1999.

[16] D.B. West, *Introduction to Graph Theory*, II izdanje, Prentice Hall, 2001.